Lokaalin riskin minimointi sijoitussidonnaiselle säästövakuutukselle

Leo Viherä
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

29. maaliskuuta 2018

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author
Leo Viherä

Työn nimi — Arbetets titel — Title
Lokaalin riskin minimointi sijoitussidonnaiselle säästövakuutukselle

Oppiaine — Läroämne — Subject
Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Maaliskuu 2018	39 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Sijoitussidonnaisella säästövakuutuksella tarkoitetaan elämänvaravakuutusta, joka on jollain tavalla sidottu finanssimarkkinoihin, vakuutuksen arvo voi riippua esimerkiksi jostain osakkeesta, rahastosta, tai indeksistä. Täten se kilpailee suoraan myös perinteisen sijoittamisen kanssa. Tässä tutkielmassa perehdytään varsinkin yhtiön kannalta sijoitussidonnaisiin säästövakuutuksiin, kuten siihen, kuinka yhtiön tulee varautua tuleviin velvoitteisiinsa ja kuinka se voi minimoida näistä aiheutuvaa riskiä.

Ensimmäisessä luvussa kootaan tutkielmassa tarvittavia määritelmiä ja tuloksia todennäkäisyysteoriasta. Tämän luvun tuloksien todistuksia ei esitä tutkielmassa.

Toisessa luvussa käsitellään lyhyesti, kuinka kassavirrat arvostetaan, sekä sitä kuinka ja miksi eri aikaan tapahtuvat suoritukset tulee korkouttaa. Korkoa koskeva teoria on tärkeä kaikessa sijoitus- ja vakuutustoimintaa käsittelevässä teoriassa ja käytännössä. Kassavirtojen käsite on hyödyllinen tapa yhtiölle pohtia, kuinka tuleviin menoihin ja tuloihin tulee varautua sekä vakuutus-, että sijoitustoiminnassa.

Kolmanneksi tarkastellaan perinteisiä säästövakuutuksia, jossa ei ole sijoituselementtiä. Esitetään, kuinka jäljellä olevaa elinaikaa voidaan käsitellä matemaattisena satunnaismuuttujana ja kuinka tätä hyödynnetään henkivakuutusten yhteydessä. Käsitellään vakuutusten hinnoittelun periaatteena käytettävää ekvivalenssiperiaatetta ja sen taustaa lyhyesti, ja tätä hyödyntäen lasketaan tämän tutkielman kannalta tärkeimmille henkivakuutustyypeille nettokertamaksut sekä osamaksut. Tämän jälkeen määritellän vastuuvelan käsite, joka on vakuutustoiminnassa tapa määrätä kuinka paljon yhtiöllä on syytä olla varallisuutta vakuutettua kohden. Esitetään sekä tulevaisuuteen, että menneisyyteen perustuvat laskutavat. Tämän lisäksi käsitellään korvauksien lisäksi yhtiölle aiheutuvia kuluja ja kuinka nämä tulee ottaa huomioon vakuutusmaksuissa. Viimeisenä tarkastellaan vakuutussopimuksen muuttamista takaisinostoa lyhyesti.

Seuraavaksi siirrytään käsittelemään finanssimarkkinoita. Aluksi esitellään pohja, jolla oletaan markkinoiden toimivan, sekä määritellään merkintöjä mitä tulemme käyttämään. Tämän jälkeen esitellään tapa minimoida sopimukseen liittyvä lokaalin riski, sekä todistetaan tähän liittyviä lauseita. Tämän pohjalta määrätään myös riskin minimoinnin suhteen reilu hinta finanssimarkkinoista riippuville sopimuksille.

Viidennessä luvussa tutkitaan sopimuksia, jotka yhdistävät henkivakuutuksen sekä rahallisen riskin. Edellisen luvun tulokset yleistetään tähän ympäristöön, nojaten oletukseen, että arvopaperimarkkinat ovat riippumattomia vakuutettujen elinajoista.

Viimeiseksi käsitellään erästä sijoitussidonnaista säästövakuutustyyppiä, universal life- vakuutusta. Vakuutuksen elementit käsitellään, johdetaan vastuuvelka, sekä pohditaan, kuinka tässä tapauksessa minimoidaan lokaali riski.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords
Sijoitussidonnainen säästövakuutus, lokaalin riskin minimointi, universal life- vakuutus

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited
Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Sisältö

Johdanto

Säästövakuutuksella eli elämänvaravakuutuksella tarkoitetaan henkivakuutusta, jossa vakuutusyhtiösitoutuu maksamaan vakuutetulle sovittuna ajanhetkenä tietyn korvauksen, mikäli tämä on tällöin vielä elossa. Tähän luetaan sekä kertakorvauksiset vakuutukset, että eläkevakuutuksen, missäkorvauksia suoritetaan pidemmällä ajanjaksolla. Perinteisestä elämänvaravakuutuksesta poiketen, korvaus voi olla myös sidottu johonkin finanssimarkkinoiden elementtiin, kuten osakkeeseen tai rahastoon. Tällöin puhutaan sijoitussionnaisesta säästövakuutuksesta.

Vakuutusyhtiön kannalta erityisen tärkeää on kiinnittää huomiota, kuinka suojautua tulevista korvauksista aiheutuvista riskeistä. Yhtiön täytyy osata hinnoitella tuotteensa niin, että varallisuus riittää korvauksien maksamiseen, mutta myös hallinnoida varallisuuttaan muuttuvien markkinoiden mukaan, siten että tappiota ei pääse syntymään suuria määriä.

Tutkielman alussa esitellään taustalla vaadittavaa todennäköisyysteoriaa, finanssimarkkinoihin liittyvää korkoteoriaa, sekä perinteisiin henkivakuutuksiin liittyvää teoriaa, sekä käsitteistöä. Esitetään, kuinka perinteisessä tapauksessa henkivakuutukset hinnoitellaa, sekä kuinka paljon varallisuutta yhtiöllä tulisi olla, että sopimuksista aiheutuvista velvoitteista selvittäisiin.

Seuraavaksi käsitellään arvopaperimarkkinoita ja sijoitusstrategioita. Keskeisenä aiheena on lokaalin riskin minimoiminen sitoumuksen suhteen, joka riippuu ainoastaan arvopaperimarkkinoista. Tähän liittyen määrätään myös sopimuksille reilut hinnat. Tämän jälkeen yleistetään tämä teoria koskemaan tilannetta, jossa sopimus riippuu sekä arvopaperien kehityksestä, että vakuutetun elinajasta.

Lopussa tarkastellaan universal life- tyypin vakuutusta, jossa tärkeänä piirteenä on vakuutusmaksujen joustavuus. Tästä seuraten vakuutusyhtiö ei voi tietää vakuutusmaksujen suuruutta ennen niiden suorittamista. Tutkitaan, kuinka tämä vaikuttaa yhtiön varautumiseen, sekä sopimuksen suojaamiseen.

1. Esitietoja

Tässä luvussa palautetaan mieleen todennäköisyysteoriasta tuttuja määritelmiä, esitietoja ja lauseita, sekä esitellään Hilbertin avaruus $\mathcal{L}^2$.

1.1 Todennäköisyysteoriaa

Olkoon $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_0, \dots, \mathcal{F}_n)$ jono sigma-algebroita, siten että

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &= \{\emptyset, \Omega\}, \qquad \mathcal{F} = \mathcal{F}_n \text{ ja} \\ \mathcal{F}_0 &\subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_n. \end{aligned}$$

Tästä syntyy stokastinen kenttä $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, jossa alisigma-algebrajonoa $\mathbb{F}$ sanotaan filtrratioksi. Stokastinen prosessi $X = \{X(t) | t = 0, \dots, n\}$ kentällä $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ on sopiva, jos $X(t)$ on $\mathcal{F}_t$ -mitallinen kaikilla $t = 0, \dots, n$. Vektoriarvoinen prosessi

$$\{X(t) | t = 0, \dots, n\}, \qquad X(t) = (X_1(t), \dots, X_k(t))$$

on sopiva, jos kaikki sen kompomentit ovat sopivia.

Määritelmä 1.1. Prosessi X on ennustettava, jos $X(t)$ on $\mathcal{F}_{t-1}$ -mitallinen kaikilla $t = 1, \dots, n$.

Määritelmä 1.2. Prosessi X on (ali-,yli-)martingaali, jos

1. X on $\mathbb{F}$-sopiva,
2. $E\big(|X(t)|\big) < \infty$, kaikilla $t = 0, \dots, n$,
3. $E\big(X(t) | \mathcal{F}_u\big) = X(u)$, kaikilla $0 \leq u \leq t \leq n$,

vastaavasti $\leq$ alimartingaalin ja $\geq$ ylimartingaalin tapauksessa.

Huomautus 1.3. Ehdollisen odotusarvon iteratiivisuudesta seuraa yhtäpitävyydet

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big(X(t) | \mathcal{F}_{t-1}\big) &= X(t-1), \\ \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\big(X(t) | \mathcal{F}_{t-1}\big) | \mathcal{F}_{t-2}\Big) &= \mathbb{E}\big(X(t-1) | \mathcal{F}_{t-2}\big), \\ \mathbb{E}\big(X(t) | \mathcal{F}_{t-2}\big) &= X(t-2). \end{aligned}$$

Induktiivisesti tästä seuraa, että diskreetille prosessille riittävä ehto martingaaliudelle on

$$\mathbb{E}\big(X(t) | \mathcal{F}_{t-1}\big) = X(t-1), \text{ kaikille } t = 1, \dots n.$$

Määritelmä 1.4. Sanotaan, että mitta Q on absoluuttisesti jatkuva mitan $\mathbb{P}$ suhteen jos $Q(A) = 0$, kaikilla joukoilla $A \in \Omega$, joilla $\mathbb{P}(A) = 0$. Tällöin merkitään

$$Q \ll \mathbb{P}.$$

Jos pätee

$$\mathbb{P} \ll Q \ll \mathbb{P},$$

sanotaan, että mitat ovat ekvivalentit.

Lause 1.5. (Doobin martingaalihajotelma). *Jos X on sopiva stokastinen prosessi stokastisella kentällä $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ja $E(|X(t)|) < \infty$ kaikilla $t = 0, \ldots, n$, on olemassa $\mathbb{P}$-melkein varmasti yksikäsitteinen hajotelma*

$$X = X(0) + M + N,$$

jossa M on martingaali ja N ennustettava prosessi filtraation $\mathbb{F}$ suhteen.

Todennäköisyysteoriasta tarkemmin lähteissä Williams [10] ja Gasbarra [3].

1.2 Hilbertin avaruus $\mathcal{L}^2$-avaruus

Määritelmä 1.6. Hilbertin avaruus $\mathcal{L}^2$ on niiden reaaliarvoisten satunnaismuuttujien virittämä avaruus, joilla on äärelliset ensimmäiset ja toiset momentit, eli

$$\mathcal{L}^2 = \{X | X \text{ on reaaliarvoinen satunnaismuuttaja ja } \mathbb{E}(X^2) < \infty\}.$$

Määritelmä 1.7. Jos $X, Y \in \mathcal{L}^2$, niin niiden sisätulo määritellään seuraavasti

$$\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}(X \cdot Y).$$

Määritelmä 1.8. Jos $X \in \mathcal{L}^2$, niin sen normi on

$$\| X \| = \mathbb{E}(X^2)^{1/2}.$$

Määritelmä 1.9. Kahden satunnaismuuttujan etäisyys $\mathcal{L}^2$- avaruudessa on

$$d(X, Y) = \| X - Y \| .$$

Jos kahden satunnaismuuttujan etäisyys $d(X, Y) = 0$, ne ovat samoja melkein kaikkialla ja ne mielletään samaksi elementiksi avaruudessa $\mathcal{L}^2$.

Hilbertin avaruutta on käsitelty tarkemmin teoksessa Bühlman, Gisler [1].

2. Kassavirrat

Kassavirrat ovat luonteva tapa tarkastella tulevia tuloja ja menoja. Lisäksi koska maksut tapahtuvat eri aikoina, sisältyy rahaan usein aika-arvo, eli korko. Oletetaan tässä tutkielmassa, että markkinoilla on aina arbitraasivapaus, eli että rahaa ei voi tehdä tyhjästä ilman riskiä. Arbitraasivapaudesta puhutaan tarkemmin kohdassa 4.2. Kassavirtoja on käsitelty esimerkiksi lähteessä Nyrhinen [6].

2.1 Korko

Esimerkiksi lainaa antaessa on hyväksyttävää periä lainatusta rahasta korkoa, koska lainatulla rahalla voidaan saavuttaa välitöntä hyötyä, lainaan voi liittyä epävarmuutta ja rahan arvo voi muuttua ajan kuluessa. Välillä $\big[(j-1), j\big), j = 1, 2, \ldots$, talletus C kasvaa vuosikorkoa $i_j \geq 0$. Toisin sanoen , jos hetkellä $(j-1)$ talletetaan määrä C, niin hetkellä j on nostettavissä määrä

$$C(1 + i_j), j = 1, 2 \ldots$$

Tästä seuraten, hetken j talletus C kasvaa hetkeen t mennessä määräksi

$$C(1 + i_j) \ldots (1 + i_t), \qquad t \geq j.$$

Samoin, hetkellä j nostetusta lainasta L maksetaan hetkellä t määrä

$$L(1 + i_j) \ldots (1 + i_t), \qquad t \geq j.$$

Jos $i_1 = i_2 = \ldots = i$ niin välillä $\big[(j-1), t\big)$ talletus C kasvaa määräksi

$$C(1 + i)^{t-j+1}.$$

2.2 Kassavirrat

Oletetaan että toimijalla on hetkellä 0 oikeus deterministisiin suorituksiin

$$\tilde{B}(1), \tilde{B}(2), \ldots, \tilde{B}(n), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Tämä tarkoittaa, että hetkellä j toimija saa suorituksen $\tilde{B}(j)$. Edellisen kohdan korkoperiaatteiden mukaan suorituksen $\tilde{B}(j)$ hetken 0 arvo on

$$B(j) = \tilde{B}(j)\big((1 + i_1) \ldots (1 + i_j)\big)^{-1}.$$

Tätä kutsutaan suorituksen $\tilde{B}(j)$ hetkeen 0 diskontatuksi arvoksi. Joten kassavirran (2.1) hetken 0 arvo on

$$V(0) = \sum_{j=1}^{n} \left((1+i_1)\dots(1+i_j)\right)^{-1} \tilde{B}(j).$$

Olkoon kassavirta $\tilde{B} = (V(0), \tilde{B}(1), \dots, \tilde{B}(n))$, jossa hetken 0 hinta määrätään edellisen mukaisesti. Huomataan, että tämä kassavirta voidaan hajottaa n kappaleeksi hetkeen 0 ja hetkeen $j = 1, \dots, n$ sijoittuvia suorituksia, eli

$$\tilde{B} = \sum_{j=1}^{n} (V_j(0), 0, \dots, \tilde{B}(j), \dots, 0),$$

jossa hinta $V_j(0)$ on suoritukseen $\tilde{B}(j)$ suhteutettu hinta, eli

$$V_j(0) = ((1+i_1)\dots,(1+i_j))^{-1}\tilde{B}(j).$$

2.3 Stokastiset kassavirrat

Edellä kassavirtojen ajateltiin olevan deterministisiä, mutta yleisessä tapauksessa hetkellä $t = 1, \dots, n$ tapahtuva suoritus $\tilde{B}(t)$ voi olla satunnainen. Tällöin ainoastaan hetkellä 0 tapahtuva suoritus on tiedossa. Hetken 0 suoritus hinnoitellaan arbitraasivapauden mukaisesti. Kassavirta $\tilde{B}$ oletetaan tällöin $\mathbb{F}$-sopivaksi. Myöskään vuosikorot eivät yleisesti ole tiedossa hetkellä 0. Vuosikoroilta vaaditaan ainoastaan, että vuoden t korko on positiivinen ja $\mathcal{F}_{t-1}$-mitallinen.

3. Säästövakuutus

Elämänvaravakuutuksessa, eli säästövakuutuksessa yhtiö maksaa asiakkaalle hetkellä t sovitun summan $S(t)$, jos tämä on elossa tällöin. Luetaan tässä säästövakuutuksiksi perinteinen säästövakuutus, jossa yhtiö suorittaa yhden korvauksen sopimuksen päättyessä elossa olevalle vakuutetulle, sekä lisäksi eläkevakuutus, jossa yhtiö suorittaa sovitusta iästä lähtien vuosittain tai kuukausittain sovitun summan, niin kauan, kun tämä on elossa, tai mahdollisesti enimmillään n vuoden ajan. Vakuutettu maksaa vakuutusmaksun yleensä osissa kuukausittain tai vuosittain. Vakuutetulla voi olla myös oikeus perua vakuutus kesken sopimuksen, jolloin yhtiö suorittaa vakuutetulle sopimuksen sen hetkisen arvon, josta vähennetään mahdollinen irtisanomiskustannus. Korvausten lisäksi yhtiölle aiheutuu hallinnollisia kuluja, jotka täytyy sisällyttää vakuutusmaksuihin. Henkivakuutusmatematiikkaa on käsitelty laajemmin lähteissä Pesonen, Soininen, Tuominen [8], Gerber [4] ja Nyrhinen [5].

3.1 Jäljellä oleva elinaika

Olkoon $T(0)$ vastasyntyneen jäljellä oleva elinaika ja olkoon F tätä vastaava kertymäfunktio, eli

$$F(t) = \mathbb{P}(T \leq t), \qquad \text{kaikilla } t \geq 0,$$

Merkitään

$$\begin{aligned} {}_tp_x &= \mathbb{P}(x\text{-ikäinen elää t vuoden kuluttua}) = \mathbb{P}(T > x + t | T > x) \\ &= \frac{\mathbb{P}(T > t + x, T > x)}{\mathbb{P}(T > x)} = \frac{1 - F(x+t)}{1 - F(x)}, \end{aligned}$$

sekä

$$\begin{aligned} {}_tq_x &= \mathbb{P}(x\text{-ikäinen kuolee t vuoden kuluessa}) = \mathbb{P}(T \leq x + t | T > x) \\ &= \frac{\mathbb{P}(T \leq t + x, T > x)}{\mathbb{P}(T > x)} = \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)}. \end{aligned}$$

Käytetään tästä lähtien x-ikäisen jäljellä olevasta elinajasta merkintää $T(x) = T$. Erityisesti siis

$$\mathbb{E}\Big(\mathbb{1}(T(x) > t)\Big) = \mathbb{P}(x\text{-ikäinen elää t vuoden kuluttua}) = {}_tp_x.$$

Nähdään, että ${}_tp_x =_{t-1} p_{x+1} \ {}_1p_x$.

3.2 Säästövakuutuksen nettohinta

Olkoon sopimus aluksi sellainen, että x-ikäinen vakuutettu maksaa hetkellä 0 vakuutusmaksun P ja yhtiö korvaa vakuutetulle summan H, jos tämä on elossa hetkellä n. Yhtiölle syntyy siis kassavirta

$$\begin{cases} B(0) &= P, \\ B(t) &= 0, \qquad\qquad 0 < t < n, \\ B(n) &= -H\mathbb{1}(T > n). \end{cases}$$

Korvaussumma on tässä tietysti satunnainen. Määrätään vakuutuksen nettokertamaksu ekvivalenssiperiaatteen mukaan, eli siten, että vakuutusmaksu on tulevien korvausten odotusarvo diskontattuna nykyhetkeen. Olkoon vuosikorko vakio $i \geq 0$. Eli

$$P = \mathbb{E}\Big((1+i)^{-n} H\mathbb{1}(T > n)\Big) = H_n p_x (1+i)^{-n}.$$

Tässä P on vakuutuksen nettokertamaksu. Ekvivalenssiperiaate pohjautuu suurten lukujen lakiin. Jos yhtiöllä on vakuutettuna N vakuutettua ja $\xi_j, j = 1, \ldots, N$ on yhtiön suorittama korvaus vakuutetulle j hetkellä n, niin pätee

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\Big(\Big| \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_N}{N} - \mathbb{E}(\xi) \Big| > \epsilon) = 0, \qquad \text{kaikilla } \epsilon > 0,$$

kun $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_N$ ovat samoin jakautuneita. Tämä tarkoittaa, että hetken n korvauksien maksamiseen riittää suurella todennäköisyydellä määrä $\mathbb{E}(\xi) + \epsilon$ per vakuutettu, vakuutettujen määrän ollessa suuri. Pieni ϵ voidaan ottaa huomioon vakuutusmaksuissa niin sanottuna varmuuslisänä. Lisäksi, koska vakuutusmaksu, sekä mahdollinen korvaus sijoittuvat eri ajanjaksoille, ehtii yhtiö saada ajallista hyötyä vakuutusmaksusta, esimerkiksi koron tai sijoituksien muodossa. Vuosikoron ollessa vakio, ehtii summa $\mathbb{E}(\xi)(1+i)^{-n}$ kasvamaan summaksi $\mathbb{E}(\xi)$, hetkeen n mennessä, jolloin on perusteltua käyttää diskontattua hintaa vakuutusmaksuissa.

Eläkevakuutuksen tapauksessa vakuutetulle maksetaan korvaussummia hetkestä m lähtien, jolloin vakuutettu on $(x+m)$-ikäinen siihen asti, kun vakuutettu kuolee. Eli kassavirraksi syntyy

$$\begin{cases} B(0) &= P, \\ B(t) &= 0, \qquad\qquad 0 < t < m, \\ B(t) &= -H\mathbb{1}(T > t), \qquad t \geq m. \end{cases}$$

Määräaikaisessa eläkkeessä korvauksia suoritetaan enintään n vuotta. Korvaussumma H voi myös vaihdella vuosittain. Ekvivalenssiperiaatteella nettokertamaksuksi saadaan nyt

$$P = \mathbb{E}\Big(H \sum_{j=m}^{\infty} (1+i)^{-j} \mathbb{1}(T > j)\Big) = H \sum_{j=m}^{\infty} {}_j p_x (1+i)^{-j}.$$

Ajatellaan seuraavaksi eläkevakuutussopimusta, jossa vakuutettu maksaa vuosittain tasaeräisiä vakuutusmaksuja P^1 sopimuksen mukaisen $h \leq n$ vuoden ajan ja yhtiö korvaa vakuutetulle vuosittain summan H sopimuksen mukaisen m vuoden jälkeen, jos tämä on vielä tällöin elossa. Vakuutusmaksuja maksetaan vain, jos vakuutettu on vielä maksun suoritushetkellä elossa. Myös tällöin käytetään ekvivalenssiperiaatetta. Yhtiön kannalta syntyy kassavirta

$$\begin{cases} B(t) & = P^1 \mathbb{1}(T > m), \qquad & 0 \leq t < h, \\ B(t) & = 0, & h \leq t < n, \\ B(t) & = -H \mathbb{1}(T > t), & t \geq m. \end{cases}$$

Vakuutusmaksu P^1 määräytyy nyt ehdosta

$$P = \mathbb{E}\Big(P^1 \sum_{j=0}^{h-1} (1+i)^{-j} \mathbb{1}(T > j)\Big) = P^1 \sum_{j=0}^{h-1} {}_jp_x (1+i)^{-j},$$

jossa P on nettokertamaksu. Vakuutusmaksut voivat myös vaihdella vuosittain, jolloin vuonna j maksetaan summa P^j.

3.3 Vastuuvelka

Vakuutusmaksut ja tulevat korvaukset sijoittuvat tyypillisesti eri ajankohdille, varsinkin siten, että maksut tapahtuvat vakuutuskauden alussa, kun korvaukset maksetaan lopussa. Tämän takia tarvitaan tapa kuvata rahamäärää, joka vakuutusyhtiöllä täytyy olla varalla tulevien korvausten ja maksujen hoitamiseksi jokaista vakuutettua kohden. Tätä kutsutaan vastuuvelaksi. Kuolleen vakuutetun vastuuvelka oletetaan nollaksi, koska tällöin vakuutusyhtiö on vapautunut kaikista tätä sopimusta koskevista vastuista. Vastuuvelka määritellään tulevien korvausten ja vakuutusmaksujen erotuksen nykyarvon odotusarvoksi.

Edellisen kohdan sopimuksessa elossa olevan vakuutetun tulevien korvausten nykyarvon odotusarvo hetkellä $t = 0, \dots, n$ on

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \mathbb{E}\Big(H \sum_{j=\max(t,m)}^{\infty} (1+i)^{-(j-t)} \mathbb{1}(T(x+t) > j-t)\Big) \\ &= H \sum_{j=\max(t,m)}^{\infty} {}_{j-t}p_{x+t} (1+i)^{-(j-t)}. \end{aligned}$$

Tulevien vakuutusmaksujen nykyarvon odotusarvo hetkellä t taas on

$$\begin{aligned} V_2(t) &= \mathbb{E}\Big(P^1 \sum_{j=t}^{h-1} \mathbb{1}(T(x+t) > j-t)(1+i)^{-(j-t)}\Big) \\ &= P^1 \sum_{j=t}^{h-1} {}_{j-t}p_{x+t} (1+i)^{-(j-t)}. \end{aligned}$$

Vastuuvelaksi $V(t)$ hetkellä $t = 0, \ldots, n$ saadaan siis

$$\begin{aligned}
V(t) &= V_1(t) - V_2(t) \\
&= H \sum_{j=\max(t,m)}^{\infty} {}_{j-t}p_{x+t}(1+i)^{-(j-t)} - P^1 \sum_{j=t}^{h-1} {}_{j-t}p_{x+t}(1+i)^{-(j-t)}.
\end{aligned}$$

Tätä kutsutaan prospektiiviseksi, eli tulevaisuuteen katsovaksi laskentatavaksi. Erikoistapauksena huomataan, että perinteinen kertakorvauksinen elämänvaravakuutus saadaan kun korvauksia koskeva termi korvataan hetkellä n tapahtuvalla korvauksella

$$H_{n-t}p_{x+t}(1+i)^{-(n-t)}.$$

Ekvivalenssiperiaatteen mukaan täytyy myös päteä $V(0) = 0$. Saadaan

$$\begin{aligned}
V_1(0) &= H \sum_{j=m}^{\infty} {}_jp_x(1+i)^{-j} \\
&=_t p_x(1+i)^{-t} H \sum_{j=\max(t,m)}^{\infty} {}_{j-t}p_{x+t}(1+i)^{-(j-t)} + H \sum_{j=m}^{t} {}_jp_x(1+i)^{-j} \\
&=_t p_x(1+i)^{-t} V_1(t) + H \sum_{j=m}^{t} {}_jp_x(1+i)^{-j} \\
V_2(0) &= P^1 \sum_{j=0}^{h-1} {}_jp_x(1+i)^{-j} \\
&= \; {}_tp_x(1+i)^{-t} P^1 \sum_{j=t}^{h-1} {}_{j-t}p_{x+t}(1+i)^{-(j-t)} + P^1 \sum_{j=0}^{\min(h-1,t-1)} {}_jp_x(1+i)^{-j} \\
&= \; {}_tp_x(1+i)^{-t} V_2(t) + P^1 \sum_{j=0}^{\min(h-1,t-1)} {}_jp_x(1+i)^{-j},
\end{aligned}$$

joten yhdistämällä nämä saadaan

$$\begin{aligned}
V_1(0) - V_2(0) = V(0) = 0 \\
{}_tp_x(1+i)^{-t}\Big(V_1(t) - V_2(t)\Big) = P^1 \sum_{j=0}^{\min(h-1,t)} {}_jp_x(1+i)^{-j} - H \sum_{j=m}^{t} {}_jp_x(1+i)^{-j},
\end{aligned}$$

eli

$$V^R(t) = \; {}_tp_x^{-1}(1+i)^t\Big(P^1 \sum_{j=0}^{\min(h-1,t-1)} {}_jp_x(1+i)^{-j} - H \sum_{j=m}^{t} {}_jp_x(1+i)^{-j}\Big). \tag{3.1}$$

Näin syntynyttä muotoa kutsutaan retrospektiiviseksi, eli menneisyyteen perustuvaksi laskutavaksi. Periaatteena tässä on, että keskimääräinen ylijäämä korkoutetaan hetkeen t.

Prospektiivista laskutapaa käytetään vastuuvelan määritelmänä, mutta retrospektiivista laskutapaa voidaan käyttää myös, kunhan varmistetaan sen yhtäpitävyys prospektiivisen tavan kanssa. Käytännössä eroja prospektiivisen ja retrospektiivisen laskutavan välillä saattaa syntyä pyöristyksien johdosta.

3.4 Bruttovakuutusmaksut

Vakuutusyhtiölle aiheutuu korvauksien lisäksi muitakin kuluja, kuten palkoista, materiaaleista ynnä muista syntyviä kuluja. Nämä täytyy myös huomioida vakuutusmaksuissa. Käsitellään tässä tutkielmassa seuraavanlaisia kuormituksia

I	Vakuutuksen perustamisesta aiheutuva kiinteä kulu
κB^t	Vuoden t vakuutusmaksuun suhteutettu kulu
γ	Vuosittainen vakuutuksen hallintoihin liittyvä kiinteä kulu

Perustamiskustannus I peritään vakuutuksen perustamishetkellä kattamaan perustamisesta aiheutuvia kustannuksia. Sen suuruuteen ei vaikuta vakuutuksen arvo, vaan se on vakio kaiken suuruisille vakuutuksille. Tällä voidaan myös pyrkiä vähentämään yhtiön näkökulmasta kannattamattomia vakuutuksia, joista aiheutuu paljon hallinnollista työtä, mutta vähän tuottoa. Perustamiskustannus myös vähentää vakuutuksen haltian kannustinta lopettaa vakuutus pian vakuutuksen perustamisen jälkeen.

Vakuutusmaksuista aiheutuva kulu κB^t peritään vuosittain vakuutusmaksun yhteydessä. Tällä katetaan maksun keräämisestä aiheutuvaa kustannusta. Se on suhteutettu vuosittaiseen maksuun, eli kun vakuutusmaksut on maksettu, ei sitä enää peritä. Hallintotoimiin liittyvä vuosittainen kulu γ peritään kattamaan vakuutuksen muista hallinnollisista tekijöistä aiheutuvaa kustannusta. Siihen ei vaikuta vakuutuksen arvo tai maksujen suuruudet. Yhdessä kuormitukset κB^t ja γ edustavat yhtiön vakuutuksesta aiheutuvia hallinnollisia kuluja.

Muita kuormituksia vakuutuksessa voisi olla esimerkiksi vakuutuksen sen hetkiseen arvoon, eli vastuuvelkaan suhteutettu vuosittainen maksu, jonkinlainen riskiin suhteutettu maksu, sekä vakuutuskauden päättyessä vakuutetulle maksettavaan korvaukseen suhteutettu maksu. Rajoitutaan tässä kuitenkin tarkastelemaan vain yllä olevia kuormituksia.

Otetaan nyt esimerkiksi perinteinen elämänvaravakuutus, jonka maksuaika on h vuotta, vakuutuskausi n vuotta ja korvaussumma H. Olkoon vuosikorko i vakio. Tällöin tiedetään, että vakioinen nettovuosimaksu P^1 määräytyy kaavasta

$$P^1 \sum_{j=0}^{h-1} {}_jp_x(1+i)^{-j} = H_np_x(1+i)^{-n}.$$

Bruttovuosimaksun B^1 tapauksessa tämä tulee muotoon

$$B^1 \sum_{j=0}^{h-1} {}_jp_x(1+i)^{-j} = H_np_x(1+i)^{-n} + I + \kappa B^1 \sum_{j=0}^{h-1} {}_jp_x(1+i)^{-j} + \gamma \sum_{j=0}^{n-1} {}_jp_x(1+i)^{-j},$$

joten bruttovuosimaksuksi saadaan

$$B^1 = \frac{H_n p_x (1+i)^{-n} + I + \gamma \sum_{j=0}^{n-1} {}_j p_x (1+i)^{-j}}{(1-\kappa) \sum_{j=0}^{h-1} {}_j p_x (1+i)^{-j}}.$$

Samoin saadaan prospektiiviseksi vastuuvelaksi hetkellä $t = 1, \ldots, n-1$, vastuuvelan määritelmän mukaan

$$V(t) = H_{n-t} p_{x+t} (1+i)^{-(n-t)} + \gamma \sum_{j=t}^{n-1} {}_j p_x (1+i)^{-j} - (1-\kappa) B^1 \sum_{j=t}^{h-1} {}_j p_x (1+i)^{-j},$$

hetken 0 vastuuvelka on muuten samanlainen, mutta tähän lisätään vielä perustettaessa syntyvä kulu I.

3.5 Takaisinosto

Vakuutetulla on usein oikeus muuttaa sopimusta kesken kauden. Äärimmäinen tapaus tästä on, että vakuutettu irtisanoo sopimuksen. Tätä kutsutaan takaisinostoksi. Tässäkin käytetään ekvivalenssiperiaatetta. Käytäntö on, että yhtiön vastuuvelka pysyy samana muutoksen tapahtuessa. Säästövakuutuksessa takaisinostettaessa vastuuvelka ennen muutosta on sama, kuin vastuuvelka muutoksen jälkeen juuri ennen kertasuorituksen maksamista. Näin ollen retrospektiivisen vastuuvelan kaavan (3.1) mukaan hetkellä t (juuri ennen mahdollista vuosimaksua P^1) vakuutettu voisi purkaa sopimuksen ja olisi oikeutettu nettomaksuun

$$V^R(t) = {}_t p_x^{-1} (1+i)^t \Big(P^1 \sum_{j=0}^{\min(h-1,t-1)} {}_j p_x (1+i)^{-j} - H \sum_{j=m}^{t} {}_j p_x (1+i)^{-j} \Big).$$

Oletetaan nyt, että edellisen mukaan vuosittain syntyy kiinteä hallintokulu γ, sekä kyseisen vuoden bruttovakuutusmaksuun suhteutettu kulu κB^t. Bruttomaksu oletetaan vakioiseksi h ensimmäisen vuoden ajan, jonka jälkeen ei enää makseta maksuja. Perustamishetkellä syntyy kustannus I, mutta tämä sisällytetään osaksi kuluja κB^1. Tämä osa on vuonna t

$$(\kappa - \kappa') B^1,$$

jossa $\kappa' B$ on varsinainen maksuun suhteutettu kulu. Jotta ekvivalenssi pätisi edelleen, täytyy kustannuksille päteä

$$I = (\kappa - \kappa') B^1 \sum_{j=0}^{h-1} {}_j p_x (1+i)^{-j}.$$

Tämän johdosta, jos vakuutus päätetään ennen, kun vakuutusmaksut on maksettu, jää perustamiskustannuksista syntyviä kuluja perimättä. Retrospektiivinen bruttovastuuvelka on nyt

$$V_B^R(t) = {}_tp_x^{-1}(1+i)^t\Big((1+\kappa-\kappa')B^1\sum_{j=0}^{\min(h-1,t-1)} {}_jp_x(1+i)^{-j} - H\sum_{j=m}^{t} {}_jp_x(1+i)^{-j} - I\Big).$$

Tämä on

$$I - (\kappa-\kappa')B^1\sum_{j=0}^{\min(h-1,t-1)} {}_jp_x(1+i)^{-j} = (\kappa-\kappa')B^1\sum_{j=\min(h-1,t-1)}^{h-1} {}_{t-j}p_{x+j}^{-1}(1+i)^{t-j}$$

vähemmän, kuin jos kulut olisi maksettu niiden syntyessä. Tämän perusteella irtisanomisen tapahtuessa, voidaan tämä summa vähentää vastuun arvosta. Tämän lisäksi vakuutusyhtiölle on vaarana, että vakuutettu, joka tuntee terveydentilansa heikkenevän, irtisanoo vakuutuksensa, jolloin vakuutusyhtiön arvioimat kuolevuudet eivät enää päde. Tätä kutsutaan haitalliseksi valikoitumiseksi ja tämän takia on myös oikeutettua pidättää tietty summa irtisanomisen tapahtuessa. Lopulta, irtisanoessa yhtiö joutuu mahdollisesti realisoimaan omaisuuttaan, jota se ei muuten olisi vielä realisoinut, joka tarkoittaa myös kuluja menetettyjen tuottojen muodossa. Näiden kulujen takia vakuutusyhtiötä voidaan pitää oikeutettuna pidättää takaisinostettaessa vuonna t itselleen summa ρ_t, joka riippuu näistä tekijöistä. Tällä sanktiolla pyritään vähentämään vakuutuksen haltian vakuutusyhtiölle yllättävää käyttäytymistä, josta aiheutuu ylimääräistä riskiä. Kuitenkin useimmat säästövakuutussopimukset sisältävät irtisanomismahdollisuuden, sillä se tekee vakuutuksesta paremman sijoituskohteen sijoittajalle, joka ei ole varma tulevaisuudennäkymistä, sillä säästövakuutuksen sopimuksien pituudet ovat yleensä pitkiä. Irtisanomissanktioiden suuruuden määrääminen pyritään tekemään siten, että vakuutus pysyy hyvin markkinoitavana, mutta irtisanomisen mahdollisuus ei aiheuta yhtiölle liian suurta riskiä. Irtisanotteassa asiakkaalle palautettava summa määrätään vähintään nollaksi, vaikka vakuutuksen arvon ja irtisanomissanktion erotukseksi saataisiin alle nolla. Toisin sanoen vakuutettu ei voi jäädä velkaa vakuutusyhtiölle irtisanomisen tapahtuessa.

4. Sijoitusstrategiat

4.1 Arvopaperit

Olkoon todennäköisyyskenttänä $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, jossa filtraatio $\mathbb{F}$ on kohdan 1.1 mukainen. Filtraatio $\mathbb{F}$ sisältää arvopaperien hinnoista muodostuvan historian, mutta saattaa sisältää muutakin tietoa, kuten tietoa vakuutettujen mahdollisista kuolemista. Olkoon markkinoilla saatavilla $d+1$ arvopaperia, ja olkoon arvopaperi 0 bondi, jota tulemme käyttämään hintojen diskonttaamisessa. Olkoon $\tilde{S}_k(t)$ arvopaperin k hetken t hinta, $t = 0, \ldots, n$ ja $k = 0, \ldots, d$. Tällöin $\tilde{S}(t)$ on hetken t kaikkien arvopapereiden hintavektori ja $\tilde{S} = (\tilde{S}(0), \ldots, \tilde{S}(n))$ on kaikkien arvopapereiden hintaprosessi. Oletetaan, että $\tilde{S}$ on $\mathbb{F}$-sopiva.

Oletetaan, että arvopaperin 0 hintaprosessi $\tilde{S}_0 = (\tilde{S}_0(0), \ldots, \tilde{S}_0(n))$ on aidosti positiivinen. Muiden arvopaperien hinnoilta ei oleta positiivisuutta. Arvopaperi 0 on yleensä 1 vuoden nollakuponkibondi, eli arvopaperi, jonka arvo vuoden päästä on 1. Tällöin sen arvo ostohetkellä on $(1+i)^{-1}$, jossa i on vuosikorko.

Merkitään nyt arvopaperin k hetken t hetkeen 0 diskontattua hintaa

$$S_k(t) = \frac{\tilde{S}_k(t)}{\tilde{S}_0(t)}.$$

Jatkossa merkitään kaikkia diskonttaamattomia hintoja tildellä ja diskontattuja ilman tildeä. Oletaan kaikkien arvopaperien hintojen $S_k(t)$ olevan neliöintegroituvia, eli $S_k(t) \in \mathcal{L}^2$.

Näin ollen arvopaperin 0 diskontattu hintaprosessi S_0 on identtisesti yksi. Merkitään vielä muiden d arvopaperien diskontattujen hintojen muodostamaa vektoria $X(t) = (S_1(t), \ldots, S_d(t))$ ja siitä syntyvää hintaprosessia $X = (X(0), \ldots, X(n))$.

4.2 Strategiat

Olkoon $t = 0, \ldots, n$ ja $k = 1, \ldots, d$. Olkoon $\eta(t)$ välillä $[t, t+1)$ toimijan hallussaolevan arvoparerin 0 määrä, sekä olkoon $\xi_k(t+1)$ välillä $(t, t+1]$ hallussaolevan arvopaperin k määrä. Oletaan, että prosessi

$$\eta = (\eta(0), \ldots, \eta(n))$$

on sopiva ja että prosessi

$$\xi = (\xi(1), \ldots, \xi(n+1))$$

on ennustettava, missä $\xi(t+1) = (\xi_1(t+1), \ldots, \xi_d(t+1))^T$. Tällöin

$$\theta(t) = (\eta(t), \xi(t+1))^T$$

on kaikkien hallussaolevien arvopaperien määrät hetkellä t. Kutsutaan tätä hetken t salkuksi. Arvopaperien määriä ei oleteta kokonaisluvuiksi, eikä positiivisiksi. Negatiivisen määrän ostamista kutsutaan lyhyeksimyyniksi. Oletaan vielä, että $\xi(n+1)$ on identtisesti nolla. Syntyvää prosessia $\theta = (\theta(0), \ldots, \theta(n))$ kutsutaan sijoitusstrategiaksi tai lyhyemmin strategiaksi. Täten strategian hetken t diskontattu arvo on

$$\begin{aligned} V_\theta(t) &= \eta(t) + X(t)\xi(t+1) \\ &= S(t)\theta(t) \\ &= \sum_{j=0}^{d} S_j(t)\theta_j(t). \end{aligned}$$

Tämä on siis strategian arvo, juuri kun arvopaperit on myyty ja uusi salkku on muodostettu. Tästä syntyvä arvoprosessi $V_\theta = (V_\theta(0), \ldots, V_\theta(n))$ on myös sopiva, sillä ξ on ennustettava. Olkoon salkun arvo juuri ennen, kun uusi salkku muodostetaan

$$\begin{aligned} V_\theta^-(t) &= \eta(t-1) + X(t)\xi(t) \\ &= S(t)\theta(t-1) \\ &= \sum_{j=0}^{d} S_j(t)\theta_j(t), \end{aligned}$$

jossa $V_\theta^-(0) = 0$. Varojen lisäys ja poistaminen sallitaan kaikilla hetkillä t. Strategiaa kutsutaan omavaraiseksi, jos siihen ei hetken 0 jälkeen lisätä, eikä siitä vähennetä varallisuutta.

Strategian θ kumulatiivinen (diskontattu) tuotto hetkeen t mennessä on

$$\begin{aligned} G_\theta(t) &= \sum_{j=1}^{t} (S(j) - S(j-1))\theta(j) \\ &= \sum_{j=1}^{t} \Big(S_0(j)\eta(j) + X(j)\xi(j) - S_0(j-1)\eta(j) - X(j-1)\xi(j) \Big) \\ &= \sum_{j=1}^{t} (X(j) - X(j-1))\xi(j), \end{aligned}$$

jossa $G_\theta(0) = 0$.

Olkoon nyt vastattavana (diskontattu) maksuprosessi $A = (A(0) \ldots, A(n))$. Tässä hetkellä nolla tapahtuva suoritus $A(0)$ oletetaan deterministiseksi kassavirraksi ja hetkillä $t = 1, \ldots, n$ tapahtuvat suoritus $A(t)$ oletetaan neliöintegroituvaksi, sekä $\mathcal{F}_t$-mitallisiksi. Jokainen suoritus voi olla joko positiivinen tai negatiivinen. Strategian θ ja maksuprosessin A kumulatiivinen (diskontattu) kustannusprosessi hetkeen t mennessä on

$$C_\theta^A(t) = V_\theta(t) - G_\theta(t) + \sum_{j=0}^{t} A(j).$$

Kulut syntyvät siis salkun arvosta, sekä vastattavista suorituksista. Kuluista vähennetään strategian tuotto. Ylä- ja alanotaatiot θ ja A jätetään tästä lähtien merkitsemättä, jos tilanteesta on selvää mihin strategiaan ja maksuprosessiin viitataan.

Merkitään hetken t kustannusten kasvua

$$\begin{aligned}
\Delta C(t) &= C(t) - C(t-1) \\
&= V(t) - G(t) + \sum_{j=0}^{t} A(j) - \Big(V(t-1) - G(t-1) + \sum_{j=0}^{t-1} A(j)\Big) \\
&= \eta(t) - \eta(t-1) + X(t)\xi(t+1) - X(t-1)\xi(t) - (X(t) - X(t-1))\xi(t) + A(t) \\
&= \eta(t) + X(t)\xi(t+1) - \big(\eta(t-1) + X(t)\xi(t)\big) + A(t) \\
&= V(t) - V^-(t) + A(t).
\end{aligned}$$

Hetkellä t kustannuksia siis syntyy maksettavasta suorituksesta $A(t)$, sekä salkun täydentämisestä aiheutuvista kuluista.

Määritelmä 4.1. Sanotaan, että strategia θ toistaa maksuprosessin A, jos siihen liittyvä kustannusprosessi $C(t) = 0$, kaikilla t ja jos

$$V(n) = 0.$$

Koska $\xi(n+1) = 0$, niin tämä ehto on yhtäpitävä ehdon $\eta(n) = 0$ kanssa. Tämän ehdon täyttämää strategiaa kutsutaan sallituksi.

Määritelmä 4.2. Markkinat ovat täydelliset, jos jokainen suoritus $H \in \mathcal{L}^2$ on toistettavissa.

Määritelmä 4.3. Markkinoilla on arbitraasi, jos on mahdollista rakentaa strategia, jolle $V(0) = 0$, sekä

$$\mathbb{P}(V^-(n) \geq 0) = 1, \qquad \mathbb{P}(V^-(n) > 0) > 0.$$

Toisin sanoen on mahdollista hankkia salkku ilmaiseksi ja positiivisella todennäköisyydellä saada tuottoa, ilman riskiä tappiosta. Koska markkinoilla on saatavilla riskitön arvopaperi, on tämä yhtäpitävää sen kanssa, että salkku hankitaan negatiivisella hinnalla ja positiivisella todennäköisyydellä myydään pois suuremmalla hinnalla ilman riskiä. Markkinat ovat arbitraasivapaat, ellei niillä ole arbitraasimahdollisuutta.

Esimerkki 1. Olkoon markkinoiden vuosikorko $i = 0$ ja olkoon markkinoilla kaksi riskillistä arvopaperia, joiden hinnat hetkellä 0 ovat $S_1(0) = S_2(0) = 1$ ja olkoon

$$\mathbb{P}(S_1(1) = S_2(1) = 0) = \frac{1}{2}$$

ja
$$\mathbb{P}(S_1(1) = 3, S_2(1) = 2) = \frac{1}{2},$$
nyt hetkellä 0 voidaan ostaa yksi kappale arvopaperia 1 ja myydälyhyeksi yksi kappale arvopaperia 2, jolloin salkun arvo hetkellä 0 on $V(0) = 0$. Hetkellä 1, jos kummankin arvopaperin hinta on 0, tuottoa ei ole tehty, mutta ei myöskään tappiota. Toisessa tapauksessa salkun arvo on

$$V^{-}(1) = S(1)\theta(0) = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1,$$

eli on saatu voittoa ilman tappion riskiä.

Määritelmä 4.4. Olkoon Q sellainen todennäköisyysmitta, jolla diskontattu hintaprosessi $S = (S(0), \ldots, X(0))$ on Q-martingaali. Olkoon lisäksi mitat Q ja $\mathbb{P}$ ekvivalentit. Tällöin mitta Q on riskineutraali todennäköisyysmitta.

Huomautus 4.5. Tällöin diskonttaamattomalle bondin hinnalle pätee

$$S_0(0) = (1 + i_1)^{-1} = \mathbb{E}_Q(\tilde{S}_0(1)).$$

Lause 4.6. *(Arbitraasihinnoittelun ensimmäinen ja toinen päälause)*

1. *Markkinat ovat arbitraasivapaat jos ja vain jos on olemassa vähintään yksi riskineutraali todennäköisyysmitta hintaprosessin S suhteen.*

2. *Markkinat ovat täydelliset, jos ja vain jos hintaprosessin S suhteen riskineutraaleja mittoja on tasan yksi.*

Tästä ja oletetusta arbitraasivapaudesta seuraa, että aina on olemassa vähintään 1 tällainen riskineutraali mitta. Markkinoiden täydellisyydestä ei tehdä mitään oletuksia. Arbitraasilauseiden todistukset on esitetty lähteessä Nyrhinen [6]. Lisäksi markkinoiden toiminnasta lähteessä Pansera [7].

4.3 Lokaalin riskin minimointi

Lokkaalin riskin minimoimisessa pyritään minimoimaan jokaisen hetken $t = 1, \ldots, n$ kustannusprosessin kasvun neliön odotusarvoa, kun tiedossa on arvopaperien hintojen historia. Esitetään tässä kappaleessa karakterisaatio lokaalin riskin minimoimiseen, sekä siihen liittyviä lauseita. Tämän kohdan todistukset perustuvat lähteeseen Pansera [7].

Doobin martingaalihajotelman 1.5 mukaan diskontattu hintaprosessi S voidaan esittää muodossa
$$S = S(0) + S^M + S^N,$$
missä $S(0)$ on hetken 0 hintavektori, S^M on prosessin martingaaliosa ja S^N on prosessin ennustettava osa. Tästä seuraa että $S^M(0) = 0$.

Määritelmä 4.7. Lokaali riskiprosessi $R_\theta = (R_\theta(1), \ldots, R_\theta(n))$ sallitulle strategialle θ määräytyy ehdosta

$$R_\theta(t) = \mathbb{E}\Big((\Delta C(t))^2 | \mathcal{F}_{t-1}\Big).$$

Lause 4.8. *Seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät*

a) Sallittu strategia $\bar{\theta}$ minimoi lokaalin riskin, eli kaikilla sallituilla strategioilla θ pätee

$$R_{\bar{\theta}}(t) \leq R_\theta(t), \qquad \textit{melkein varmasti},$$

kaikille $t = 1, \ldots, n$.

b) Sallittu strategia θ minimoi

$$\mathbb{E}\Big((\Delta C(t) + \ldots + \Delta C(n))^2 | \mathcal{F}_{t-1}\Big), \tag{4.1}$$

kaikilla $t = 1, \ldots, n$.

c) Sallittu strategia θ on ratkaisu yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} \mathbb{E}\Big(S(t)S_0(t)|\mathcal{F}_{t-1}\Big)\theta(t-1) &= \mathbb{E}\Big((V(t)+A(t))S_0(t)|\mathcal{F}_{t-1}\Big), \\ &\vdots \\ \mathbb{E}\Big(S(t)S_d(t)|\mathcal{F}_{t-1}\Big)\theta(t-1) &= \mathbb{E}\Big((V(t)+A(t))S_d(t)|\mathcal{F}_{t-1}\Big), \end{cases} \tag{4.2}$$

kaikille $t = 1, \ldots, n$.

d) Kaikille $t = 1, \ldots, n$ pätee

$$\mathbb{E}\Big(\Delta C(t)|\mathcal{F}_{t-1}\Big) = 0, \qquad \textit{ja} \tag{4.3}$$

$$\mathbb{E}\Big(S^M(t)\Delta C(t)|\mathcal{F}_{t-1}\Big) = 0. \tag{4.4}$$

Ehdosta (4.3) seuraa, että kustannusprosessi C on martingaali ja ehdosta (4.4) seuraa, että martingaalien C ja S^M tulo $S^M C$ on martingaali.

Koska nämä ehdot ovat yhtäpitävät, sallittu strategia θ, joka täyttää minkä tahansa näistä neljästä ehdosta minimoi lokaalin riskin. Tällainen strategia ei välttämättä ole yksikäsitteinen, mutta strategiaan liittyvät prosessit V^-, V ja C ovat yksikäsitteisiä.

Jos hintaprosessi S on martingaali todennäköisyysmitan $\mathbb{P}$ suhteen, sanotaan, että lokaalin riskin minimoiva strategia θ minimoi riskin.

Todistus. Esitetään todistus käyttäen takaperäistä induktiota, eli osoitetaan ensin, että lause pätee tapauksessa $t = n$, jonka jälkeen oletetaan, että lause pätee, kun $t = j+1, \ldots, n$, jossa $j < n$ ja näytetään, että lause pätee tapauksessa $t = j$.

Oletetaan ensin siis, että $t = n$.

1. Nyt

$$\mathbb{E}\Big((\Delta C(t) + \cdots + \Delta C(n))^2 | \mathcal{F}_{t-1}\Big) = \mathbb{E}\Big((\Delta C(n))^2 | \mathcal{F}_{n-1}\Big) = R_\theta(n),$$

joten kohdat *a)* ja *b)* ovat yhtäpitävät.

2. Osoitetaan nyt kohtien *b)* ja *c)* yhtäpitävyys. Koska sallitulle strategiale pätee $V(n) = 0$, vaatimuksesta (4.1) saadan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big((\Delta C(t) + \ldots + \Delta C(n))^2 | \mathcal{F}_{t-1}\Big) &= \mathbb{E}\Big((\Delta C(n))^2 | \mathcal{F}_{n-1}\Big) \\ &= \mathbb{E}\Big((V(n) - V^-(t) + A(n))^2 | \mathcal{F}_{n-1}\Big) \\ &= \mathbb{E}\Big((A(n) - S(n)\theta(n-1))^2 | \mathcal{F}_{n-1}\Big). \qquad (4.5)\end{aligned}$$

Avaamalla neliöinnin tästä saadaan

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big((A(n) - S(n)\theta(n-1))^2 | \mathcal{F}_{n-1}\Big) = \mathbb{E}\Big((A(n) - \sum_{i=0}^{d} S_i(n)\theta_i(n-1))^2 | \mathcal{F}_{n-1}\Big) \\ =&\mathbb{E}\Big(A(n)^2 - 2A(n)\sum_{i=0}^{d} S_i(n)\theta_i(n-1) + (\sum_{i=0}^{d} S_i(n)\theta_i(n-1))^2 | \mathcal{F}_{n-1}\Big) \\ =&\mathbb{E}\Big(A(n)^2 | \mathcal{F}_{n-1}\Big) - 2\sum_{i=0}^{d}\theta_i(n-1)\mathbb{E}\Big(A(n)S_i(n)|\mathcal{F}_{n-1}\Big) + \sum_{i=0}^{d}\theta_i(n-1)^2\mathbb{E}\Big(S_i(n)^2|\mathcal{F}_{n-1}\Big) \\ &+ 2\sum_{i=0}^{d}\sum_{j=i+1}^{d}\theta_i(n-1)\theta_j(n-1)\mathbb{E}\Big(S_i(n)S_j(n)|\mathcal{F}_{n-1}\Big).\end{aligned}$$

Kiinteällä $i = k$ tämän osittaisderivaattafunktioksi thetan suhteen saadaan

$$\begin{aligned}&2\theta_k(n-1)\mathbb{E}\Big(S_k(n)^2|\mathcal{F}_{n-1}\Big) + 2\sum_{j\neq k}\theta_j(n-1)\mathbb{E}\Big(S_j(n)S_k(n)|\mathcal{F}_{n-1}\Big) \\ &\quad - 2\mathbb{E}\Big(A(n)S_k(n)|\mathcal{F}_{n-1}\Big) \\ &= 2\mathbb{E}\Big(S(n)S_k(n)|\mathcal{F}_{n-1}\Big)\theta(n-1) - 2\mathbb{E}\Big(A(n)S_k(n)|\mathcal{F}_{n-1}\Big).\end{aligned}$$

Koska välttämätön ehto minimille on, että osittaisderivaatat häviävät, täytyy olla

$$\mathbb{E}\Big(S(n)S(n)\theta(n-1)|\mathcal{F}_{n-1}\Big) = \mathbb{E}\Big(S(n)A(n)|\mathcal{F}_{j-1}\Big). \qquad (4.6)$$

Tämä voidaan kirjoittaa yhtälöryhmäksi

$$\begin{cases}\mathbb{E}\Big(S(n)S_0(n)|\mathcal{F}_{n-1}\Big)\theta(n-1) &= \mathbb{E}\Big(A(n)S_0(n)|\mathcal{F}_{n-1}\Big), \\ & \vdots \\ \mathbb{E}\Big(S(n)S_d(n)|\mathcal{F}_{n-1}\Big)\theta(n-1) &= \mathbb{E}\Big(A(n)S_d(n)|\mathcal{F}_{n-1}\Big),\end{cases} \qquad (4.7)$$

joka on yhtälöryhmä (4.2) tapauksessa $t = n$, koska $V(n) = 0$. Toisinpäin, oletetaan, että $\hat{\theta}(n-1)$ toteuttaa yhtälöryhmän (4.7). Tällöin mielivaltaiselle θ pätee

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big((A(n) - S(n)\theta(n-1))^2|\mathcal{F}_{n-1}\Big)\\
=&\mathbb{E}\Big((A(n) - S(n)\hat{\theta}(n-1) + S(n)\hat{\theta}(n-1) - S(n)\theta(n-1))^2|\mathcal{F}_{n-1}\Big)\\
=&\mathbb{E}\Big((A(n) - S(n)\hat{\theta}(n-1) + S(n)(\hat{\theta}(n-1) - \theta(n-1)))^2|\mathcal{F}_{n-1}\Big)\\
=&\mathbb{E}\Big((A(n) - S(n)\hat{\theta}(n-1))^2|\mathcal{F}_{n-1}\Big) + \mathbb{E}\Big((S(n)(\hat{\theta}(n-1) - \theta(n-1)))^2|\mathcal{F}_{n-1}\Big)\\
&\qquad + 2\mathbb{E}\Big(S(n)(\hat{\theta}(n-1) - \theta(n-1))(A(n) - S(n)\hat{\theta}(n-1))|\mathcal{F}_{n-1}\Big),
\end{aligned}
$$

jossa viimeisestä osasta saadaan

$$
\begin{aligned}
&2\mathbb{E}\Big(\sum_{i=0}^{d} S_i(n)(\hat{\theta}_i(n-1) - \theta_i(n-1))(A(n) - S(n)\hat{\theta}(n-1))|\mathcal{F}_{n-1}\Big)\\
=&2\sum_{i=0}^{d}(\hat{\theta}_i(n-1) - \theta_i(n-1))\mathbb{E}\Big(S_i(n)(A(n) - S(n)\hat{\theta}(n-1))|\mathcal{F}_{n-1}\Big)\\
=&0,
\end{aligned}
$$

koska oletuksen mukaan kaikilla $i = k$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(S_i(n)(A(n) - S(n)\hat{\theta}(n-1))|\mathcal{F}_{n-1}\Big)\\
=&\mathbb{E}\Big(A(n)S_k(n)|\mathcal{F}_{n-1}\Big) - \mathbb{E}\Big(S(n)S_k(n)|\mathcal{F}_{n-1}\Big)\theta(n-1) = 0.
\end{aligned}
$$

Saadaan siis

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big((A(n) - S(n)\theta(n-1))^2|\mathcal{F}_{n-1}\Big)\\
=&\mathbb{E}\Big((A(n) - S(n)\hat{\theta}(n-1))^2|\mathcal{F}_{n-1}\Big) + \mathbb{E}\Big((S(n)(\hat{\theta}(n-1) - \theta(n-1)))^2|\mathcal{F}_{n-1}\Big)\\
\geq&\mathbb{E}\Big((A(n) - S(n)\hat{\theta}(n-1))^2|\mathcal{F}_{n-1}\Big).
\end{aligned}
$$

Yhtäsuuruus pätee, kun

$$
\mathbb{E}\Big((S(n)(\hat{\theta}(n-1) - \theta(n-1)))^2|\mathcal{F}_{n-1}\Big) = 0,
$$

eli $\theta(n-1) = \hat{\theta}(n-1)$ sopii minimoivaksi salkuksi.

3. Osoitetaan seuraavaksi kohtien *c*) ja *d*) yhtäpitävyys. Oletetaan, että (4.2) pätee. Tällöin, koska $S_0(n) = 1$ ensimmäisestä yhtälöstä seuraa

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(A(n) - S(n)\theta(n-1)|\mathcal{F}_{n-1}\Big) &= 0,\\
\mathbb{E}\Big(\Delta C(n)|\mathcal{F}_{n-1}\Big) &= 0.
\end{aligned}
$$

Joka osoittaa ensimmäisen väitteen. Käytetään tätä tietoa, sekä Doobin martingaalihajotelmaa osoittamaan toinen tulos. Yhtälöstä 4.6 saadaan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(S(n)(A(n)-S(n)\theta(n-1))|\mathcal{F}_{n-1}\Big)&=0,\\ \mathbb{E}\Big((S(0)+S^N(n)+S^M(n))\Delta C(n)|\mathcal{F}_{n-1}\Big)&=0.\end{aligned}$$

Koska S^N on ennustettava, saadaan

$$\begin{aligned}(S(0)+S^N(n))\mathbb{E}\Big(\Delta C(n)|\mathcal{F}_{n-1}\Big)+\mathbb{E}\Big(S^M(n)\Delta C(n)|\mathcal{F}_{n-1}\Big)&=0,\\ \mathbb{E}\Big(S^M(n)\Delta C(n)|\mathcal{F}_{n-1}\Big)&=0.\end{aligned}$$

Vastaavasti oletettamalla, että (4.3) ja (4.4) pätevät tapauksessa $t=n$, saadaan

$$\begin{aligned}(S(0)+S^N(n))\mathbb{E}\Big(\Delta C(n)|\mathcal{F}_{n-1}\Big)+\mathbb{E}\Big(S^M(n)\Delta C(n)|\mathcal{F}_{n-1}\Big)&=0,\\ \mathbb{E}\Big(S(n)(A(n)-S(n)\theta(n-1))|\mathcal{F}_{n-1}\Big)&=0,\end{aligned}$$

josta seuraa (4.2) tapauksessa $t=n$.

On siis näytetty väitteiden yhtäpitävyys, kun $t=n$. Oletetaan seuraavaksi, että väite pätee kaikilla $t=j+1,\ldots,n$. On näytettävä, että väite pätee, kun $t=j$.

1. Osoitetaan ensin kohtien b) ja c) yhtäpitävyys. Minimoitavana on

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big((\Delta C(j)+\ldots+\Delta C(n))^2|\mathcal{F}_{j-1}\Big)\\ =&\mathbb{E}\Big((V(j)+A(j)-S(j)\theta(j-1)+\Delta C(j+1)+\ldots+\Delta C(n))^2|\mathcal{F}_{j-1}\Big).\end{aligned} \tag{4.8}$$

Samoin, kun tapauksessa $t=n$, avaamalla tämä saadaan muotoon

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big((\Delta C(j)+\ldots+\Delta C(n))^2|\mathcal{F}_{j-1}\Big)\\ =&\mathbb{E}\Big((V(j)+A(j))^2|\mathcal{F}_{j-1}\Big)-2\sum_{i=0}^{d}\theta_i(j-1)\mathbb{E}\Big((V(j)+A(j))S_i(j)|\mathcal{F}_{j-1}\Big)\\ &+2\mathbb{E}\Big((V(j)+A(j))(\Delta C(j+1)+\ldots+\Delta C(n))|\mathcal{F}_{j-1}\Big)\\ &+\sum_{i=0}^{d}\theta_i(j-1)^2\mathbb{E}\Big(S_i(j)^2|\mathcal{F}_{j-1}\Big)+2\sum_{i=0}^{d}\sum_{m=i+1}^{d}\theta_i(j-1)\theta_m(j-1)\mathbb{E}\Big(S_i(j)S_m(j)|\mathcal{F}_{n-1}\Big)\\ &-2\sum_{i=0}^{d}\theta_i(j-1)\mathbb{E}\Big((\Delta C(j+1)+\ldots+\Delta C(n))S_i(j)|\mathcal{F}_{j-1}\Big)\\ &+\mathbb{E}\Big((\Delta C(j+1)+\ldots+\Delta C(n))^2|\mathcal{F}_{j-1}\Big).\end{aligned}$$

Jälleen, kun $i = k$ osittaisderivaataksi saadaan

$$\begin{aligned}
&2\theta_k(j-1)\mathbb{E}\Big(S_k(j)^2|\mathcal{F}_{j-1}\Big) + 2\sum_{m\neq k}\theta_j(j-1)\mathbb{E}\Big(S_m(j)S_k(j)|\mathcal{F}_{j-1}\Big) \\
&\quad - 2\mathbb{E}\Big((V(j)+A(j))S_k(j)|\mathcal{F}_{j-1}\Big) - 2\mathbb{E}\Big((\Delta C(j+1)+\ldots+\Delta C(n))S_k(j)|\mathcal{F}_{j-1}\Big) \\
=&2\mathbb{E}\Big(S(j)S_k(j)|\mathcal{F}_{j-1}\Big)\theta(j-1) - 2\mathbb{E}\Big(A(j)S_k(j)|\mathcal{F}_{j-1}\Big),
\end{aligned}$$

koska viimeisestä osasta saadaan

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big((\Delta C(j+1)+\ldots+\Delta C(n))S_k(j)|\mathcal{F}_{j-1}\Big) \\
=&\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\Delta C(j+1)+\ldots+\Delta C(n)|\mathcal{F}_j)S_k(j)|\mathcal{F}_{j-1}\Big) = 0,
\end{aligned}$$

koska oletuksen mukaan prosessi C on martingaali kaikille $t = j+1,\ldots,n$. Koska taas minimikohdassa osittaisderivaattojen täytyy hävitä, saadaan yhtälö

$$\mathbb{E}\Big(S(j)S(j)\theta(j-1)|\mathcal{F}_{j-1}\Big) = \mathbb{E}\Big((V(j)+A(j))S(j)|\mathcal{F}_{j-1}\Big),$$

joka on yhtäpitävä yhtälöryhmän (4.2) kanssa, kun $t = j$. Toisinpäin, oletetaan, että $\hat{\theta}$ toteuttaa yhtälöryhmän (4.7), kun $t \geq j$. Kuten tapauksessa $t = n$, mielivaltaiselle θ pätee nyt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big((\Delta C(j)+\ldots+\Delta C(n))^2|\mathcal{F}_{j-1}\Big) \\
=&\mathbb{E}\Big((V(j)+A(j)-S(j)\theta(j-1)+\Delta C(j+1)+\ldots+\Delta C(n))^2|\mathcal{F}_{j-1}\Big) \\
=&\mathbb{E}\Big((V(j)+A(j)-S(j)\hat{\theta}(j-1)+S(j)(\hat{\theta}(j-1)-\theta(j-1)) \\
&\qquad\quad +\Delta C(j+1)+\ldots+\Delta C(n))^2|\mathcal{F}_{j-1}\Big) \\
=&\mathbb{E}\Big(\big(V(j)+A(j)-S(j)\hat{\theta}(j-1)\big)^2|\mathcal{F}_{j-1}\Big) + \mathbb{E}\Big(\big(S(j)(\hat{\theta}(j-1)-\theta(j-1))\big)^2|\mathcal{F}_{j-1}\Big) \\
&\quad + \mathbb{E}\Big((\Delta C(j+1)+\ldots+\Delta C(n))^2|\mathcal{F}_{j-1}\Big) \\
&\quad + 2\mathbb{E}\Big(S(j)(\hat{\theta}(j-1)-\theta(j-1))(V(j)+A(j)-S(j)\hat{\theta}(j-1))|\mathcal{F}_{j-1}\Big) \\
&\quad + 2\mathbb{E}\Big((V(j)+A(j)-S(j)\hat{\theta}(j-1))(\Delta C(j+1)+\ldots+\Delta C(n))|\mathcal{F}_{j-1}\Big) \\
&\quad + 2\mathbb{E}\Big(S(j)(\hat{\theta}(j-1)-\theta(j-1))(\Delta C(j+1)+\ldots+\Delta C(n))|\mathcal{F}_{j-1}\Big) \\
=&\mathbb{E}\Big(\big(V(j)+A(j)-S(j)\hat{\theta}(j-1)\big)^2|\mathcal{F}_{j-1}\Big) + \mathbb{E}\Big(\big(S(j)(\hat{\theta}(j-1)-\theta(j-1))\big)^2|\mathcal{F}_{j-1}\Big) \\
&\quad + \mathbb{E}\Big((\Delta C(j+1)+\ldots+\Delta C(n))^2|\mathcal{F}_{j-1}\Big),
\end{aligned}$$

jossa viimeinen yhtäsuuruus seuraa taas oletuksesta, että $\hat{\theta}(j-1)$ toteuttaa yhtälöryhmän (4.5) ja siitä, että prosessi C on martingaali kaikille $t > j$. Nyt, koska oletuksen mukaan viimeinen osa minimoituu, jos $\hat{\theta}$ toteuttaa yhtälöryhmän (4.5), kaikilla $t > j$, niin $\hat{\theta}$ kelpaa minimoimaan halutun odotusarvon.

2. Kohtien $a)$ ja $b)$ yhtäpitävyyden osoittamiseksi huomataan, että minimoitavana on

$$R_\theta(j) = \mathbb{E}\Big((\Delta C(j))^2|\mathcal{F}_{j-1}\Big) = \mathbb{E}\Big((V(j) + A(j) - S(j)\theta(j-1))^2|\mathcal{F}_{j-1}\Big).$$

Tämä vastaa minimointitehtävää (4.8), ilman termejä $\Delta C(j+1) + \ldots + \Delta C(n)$. Yhtäpitävyys seuraa samanlaisista laskuista kun edellä, jättäen nämä termit pois.

3. Kohtien $c)$ ja $d)$ yhtäpitävyys seuraa samalla tavalla kun tapauksessa $t = n$, kun odotusarvoihin lisätään termi $V(j)$, tämä ei kuitenkaan muuta laskuja oleellisesti.

Prosessien V^-, V ja C yksikäsitteisyyden toteamiseksi oletetaan, että θ ja θ^* minimoivat lokaalin riskin. Tehdään vastaoletus, että $S(n)\theta(n-1) \neq S(n)\theta^*(n-1)$. Tällöin

$$\mathbb{E}\Big((S(n)\theta(n-1) - S(n)\theta^*(n-1))^2\Big) > 0,$$
$$\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}((S(n)\theta(n-1) - S(n)\theta^*(n-1))^2|\mathcal{F}_{n-1})\Big) > 0,$$

jolloin täytyy olla

$$\mathbb{P}\Big(\mathbb{E}\Big((S(n)\theta(n-1) - S(n)\theta^*(n-1))^2|\mathcal{F}_{n-1}\Big) > 0\Big) > 0.$$

Tästä saadaan

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big((S(n)\theta(n-1) - S(n)\theta^*(n-1))^2|\mathcal{F}_{n-1}\Big)\\
=&\mathbb{E}\Big((S(n)\theta(n-1))^2 + (S(n)\theta^*(n-1))^2 - 2S(n)\theta(n-1)S(n)\theta^*(n-1)|\mathcal{F}_{n-1}\Big)\\
=&\mathbb{E}\Big(A(n)S(n)\theta(n-1) + A(n)S(n)\theta^*(n-1) - 2A(n)S(n)\theta^*(n-1)|\mathcal{F}_{n-1}\Big),
\end{aligned}$$

koska lauseen mukaan pätee

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big((S(n)\theta(n-1))^2|\mathcal{F}_{n-1}\Big) &= \mathbb{E}\Big(S(n)\theta(n-1)S(n)|\mathcal{F}_{n-1}\Big)\theta(n-1)\\
&= \sum_{i=0}^{d} \mathbb{E}\Big(S(n)S_i(n)|\mathcal{F}_{n-1}\Big)\theta_i(n-1)\theta(n-1)\\
&= \sum_{i=0}^{d} \mathbb{E}\Big(A(n)S_i(n)|\mathcal{F}_{n-1}\Big)\theta_i(n-1)\\
&= \mathbb{E}\Big(A(n)S(n)|\mathcal{F}_{n-1}\Big)\theta(n-1),
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(S(n)\theta(n-1)S(n)\theta^*(n-1)|\mathcal{F}_{n-1}\Big) &= \sum_{i=0}^{d} \mathbb{E}\Big(S(n)S_i(n)|\mathcal{F}_{n-1}\Big)\theta_i(n-1)\theta^*(n-1)\\
&= \mathbb{E}\Big(A(n)S(n)|\mathcal{F}_{n-1}\Big)\theta^*(n-1).
\end{aligned}$$

Lisäksi, koska sekä θ, että θ^* minimoivat riskin, täytyy olla

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big((\Delta C(n))^2|\mathcal{F}_{n-1}\Big) &= \mathbb{E}\Big((\Delta C^*(n))^2|\mathcal{F}_{n-1}\Big),\\
\mathbb{E}\Big((A(n)-S(n)\theta(n-1))^2|\mathcal{F}_{n-1}\Big) &= \mathbb{E}\Big((A(n)-S(n)\theta^*(n-1))^2|\mathcal{F}_{n-1}\Big),\\
\mathbb{E}\Big((S(n)\theta(n-1))^2-2A(n)S(n)\theta(n-1)|\mathcal{F}_{n-1}\Big) &= \mathbb{E}\Big((S(n)\theta^*(n-1))^2\\
&\quad -2A(n)S(n)\theta^*(n-1)|\mathcal{F}_{n-1}\Big),\\
\mathbb{E}\Big(A(n)S(n)\theta(n-1)|\mathcal{F}_{n-1}\Big) &= \mathbb{E}\Big(A(n)S(n)\theta^*(n-1)|\mathcal{F}_{n-1}\Big).
\end{aligned}$$

Nyt saadaan

$$\begin{aligned}
&\Big\{\mathbb{E}\Big((S(n)\theta(n-1)-S(n)\theta^*(n-1))^2|\mathcal{F}_{n-1}\Big)>0\Big\}\\
&=\Big\{\mathbb{E}\Big(A(n)S(n)\theta(n-1)+A(n)S(n)\theta^*(n-1)-2A(n)S(n)\theta^*(n-1)|\mathcal{F}_{n-1}\Big)>0\Big\}\\
&=\Big\{\mathbb{E}\Big(2A(n)S(n)\theta^*(n-1)-2A(n)S(n)\theta^*(n-1)|\mathcal{F}_{n-1}\Big)>0\Big\}=\{0>0\},
\end{aligned}$$

jonka todennäköisyys oletettiin positiiviseksi, joten on saatu ristiriita. Täytyy siis olla $V^-(n)=S(n)\theta(n-1)=S(n)\theta^*(n-1)$. Myös pätee $V(n)=0=V^*(n)$. Oletetaan nyt, että prosessit V ja V^- ovat yksikäsitteisiä kaikilla $t>j$. Tällöin

$$\mathbb{E}\Big((S(j)\theta(j-1))^2|\mathcal{F}_{j-1}\Big)=\mathbb{E}\Big((V(j)+A(j))S(j)|\mathcal{F}_{j-1}\Big)\theta(j-1),$$

ja

$$\mathbb{E}\Big(S(j)\theta(j-1)S(j)\theta^*(j-1)|\mathcal{F}_{j-1}\Big)=\mathbb{E}\Big((V(j)+A(j))S(j)|\mathcal{F}_{j-1}\Big)\theta^*(j-1).$$

Ja koska θ ja θ^* minimoivat riskin, pätee

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big((\Delta C(j))^2|\mathcal{F}_{j-1}\Big) &= \mathbb{E}\Big((\Delta C^*(j))^2|\mathcal{F}_{j-1}\Big),\\
\mathbb{E}\Big((V(j)+A(j)-S(j)\theta(j-1))^2|\mathcal{F}_{j-1}\Big) &= \mathbb{E}\Big((V(j)+A(j)-S(j)\theta^*(j-1))^2|\mathcal{F}_{j-1}\Big),\\
\mathbb{E}\Big((V(j)+A(j))S(j)\theta(j-1)|\mathcal{F}_{j-1}\Big) &= \mathbb{E}\Big((V(j)+A(j))S(j)\theta^*(j-1)|\mathcal{F}_{j-1}\Big).
\end{aligned}$$

Nyt olettamalla $S(j)\theta(j-1)\neq S(j)\theta^*(j-1)$ saadaan

$$\begin{aligned}
&\Big\{\mathbb{E}\Big((S(j)\theta(j-1)-S(j)\theta^*(j-1))^2|\mathcal{F}_{j-1}\Big)>0\Big\}\\
&=\Big\{\mathbb{E}\Big(2(V(j)+A(j))S(j)\theta^*(j-1)-2(V(j)+A(j))S(j)\theta^*(j-1)|\mathcal{F}_{j-1}\Big)>0\Big\}\\
&=\{0>0\},
\end{aligned}$$

joka on jälleen ristiriita. Joten prosessi V^- on yksikäsitteinen kaikilla t.

Olkoon strategiat θ^A ja θ^B, lokaalin riskin minimoivia. Tehdään vastaoletus, että jollain $t = 1, \ldots, n$ pätee

$$S(t)\theta^A(t) = V^A(t) < V^B(t) = S(t)\theta^B(t).$$

Nyt myymällä lyhyeksi salkun $\theta^B(t)$ ja ostamalla salkun $\theta^A(t)$ saadaan salkku $(\theta^A(t) - \theta^B(t))$, jonka arvo hetkellä t on

$$S(t)(\theta^A(t) - \theta^B(t)) < 0,$$

mutta koska arvoprosessi V^- on yksikäsitteinen, on salkun arvo juuri ennen hetkeä $(t+1)$ nolla. Joten hetkellä t on saatu rahaa tyhjästä, jota ei tarvitse myöskään maksaa takaisin. Tämä on ristiriita arbitraasivapauden kanssa, joten prosessin V täytyy olla yksikäsitttei-nen. Prosessin C määritelmästä ja arvoprosessien V ja V^- yksikäsitteisyydestä seuraa myös, että kustannusprosessin C täytyy olla yksikäsitteinen. Joten prosessien V, V^- ja C täytyy olla yksikäsitteisiä kailla t. □

Määritelmä 4.9. Sanotaan, että maksuprosessi A on reilu, jos millä tahansa sen lokaalin riskin minimoivalla strategialla θ pätee

$$C(0) = 0,$$

joka on siis yhtäpitävä väitteen

$$V(0) = -A(0) = \pi(0)$$

kanssa eli maksuprosesseista A maksetaan hetkellä 0 hinta $\pi(0)$, joka käytetaan riskin minimoivan salkun muodostamiseen hetkellä 0. Tällöin sanotaan, että $\pi(0)$ on maksuprosessin A reilu hetken 0 hinta. Samalla tavalla lokaalin riskin minimoivalle strategialle θ määrätään maksuprosessin A hetken t reilu hinta $\pi(t) = V(t)$.

Korollaari 4.10. *Jos omavarainen strategia θ toistaa maksuprosessin A, minimoi strategia θ lokaalin riskin, maksuprosessi A on reilu, sekä maksuprosessin A hinta hetkellä t on $\pi(t) = V(t)$.*

Huomautus 4.11. Erityisesti vakiokorkoisessa ympäristössä bondin hinnalle pätee siis

$$\pi^{\tilde{S}_0(n)}(t) = (1+i)^{-(n-t)}.$$

Lause 4.12. *Olkoon θ^A ja θ^B lokaalin riskin minimoivia strategioita maksuprosesseille A ja B. Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}$. Tällöin strategia $\lambda\theta^A + \theta^B$ minimoi lokaalin riskin maksuprosessille $\lambda A + B$.*

Todistus. Ensinnäkin huomataan, että

$$V_{\lambda\theta^A+\theta^B}(t) = S(t)(\lambda\theta^A(t-1) + \theta^B(t-1)) = \lambda V_{\theta^A}(t) + V_{\theta^B}(t),$$

kaikille t. Koska strategia θ^A minimoi lokaalin riskin, pätee lauseen 4.8 mukaan

$$\mathbb{E}\Big(S(t)S_k(t)|\mathcal{F}_{t-1}\Big)\theta^A(t-1) = \mathbb{E}\Big((V(t)+A(t))S_k(t)|\mathcal{F}_{t-1}\Big),$$

kaikille k ja kaikille t. Vastaavasti sama pätee strategialle θ^B. Tästä seuraten pätee

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(S(t)S_k(t)|\mathcal{F}_{t-1}\Big)\lambda\theta^A(t-1) + \mathbb{E}\Big(S(t)S_k(t)|\mathcal{F}_{t-1}\Big)\theta^B(t-1)\\ = \lambda\mathbb{E}\Big((V(t)+A(t))S_k(t)|\mathcal{F}_{t-1}\Big) + \mathbb{E}\Big((V(t)+B(t))S_k(t)|\mathcal{F}_{t-1}\Big),\end{aligned}$$

josta saadaaan

$$\mathbb{E}\Big(S(t)S_k(t)|\mathcal{F}_{t-1}\Big)(\lambda\theta^A(t-1)+\theta^B(t-1)) = \mathbb{E}\Big(((V(t)+(\lambda A(t)+B(t)))S_k(t)|\mathcal{F}_{t-1}\Big),$$

josta seuraa väite lauseen 4.8 mukaisesti. □

Koska kohdan 2.2 mukaan mikä tahansa maksuprosessi voidaan hajottaa yksittäisten suoritusten summaksi, voidaan rajoittua yksittäisten suoritusten lokaaleiden minimointi strategioiden tutkimiseen. Olkoon tästä lähtien siis H hetkellä n tapahtuva suoritus.

Esitetään esimerkin avulla, kuinka lokaalin riskin minimoiva strategia voidaan löytää.

Esimerkki 2. Olkoon vastattavana hetkellä 2 tapahtuva suoritus H. Olkoon markkinoilla riskittömän bondin lisäksi yksi riskillinen arvopaperi, jonka hinta hetkellä $t = 0, 1, 2$, on $X(t)$. Lasketaan lauseen 4.8 a)-kohdan avulla dynaamisesti, eli lähtien loppupäästä. On siis ensin minimoitava

$$\begin{aligned}R_\theta(2) &= \mathbb{E}\Big((\Delta C(2))^2|\mathcal{F}_1\Big) = \mathbb{E}\Big((H-\eta(1)-X(2)\xi(2))^2|\mathcal{F}_1\Big)\\ &= \mathbb{E}\Big(H^2 - 2H\eta(1) - 2HX(2)\xi(2) + \eta(1)^2 + 2X(2)\xi(2)\eta(1) + X(2)^2\xi(2)^2|\mathcal{F}_1\Big),\end{aligned}$$

jossa $\eta(t)$ on bondien määrä ja $\xi(t)$ on riskillisen arvopaperin määrä hetkellä t. Ottamalla osittaisderivaatat tuntemattomien $\eta(1)$ ja $\xi(2)$ suhteen ja asettamalla ne nolliksi saadaan yhtälöt

$$\eta(1) + \mathbb{E}(X(2)|\mathcal{F}_1)\xi(2) - \mathbb{E}(H|\mathcal{F}_1) = 0,$$

ja

$$\mathbb{E}(X(2)^2|\mathcal{F}_1)\xi(2) + \mathbb{E}(X(2)|\mathcal{F}_1)\eta(1) - \mathbb{E}(HX(2)|\mathcal{F}_1) = 0.$$

Ensimmäisestä saadaan

$$\eta(1) = \mathbb{E}(H|\mathcal{F}_1) - \mathbb{E}(X(2)|\mathcal{F}_1)\xi(2),$$

jonka sijoittamalla toiseen yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X(2)^2|\mathcal{F}_1)\xi(2) - \mathbb{E}(X(2)|\mathcal{F}_1)^2\xi(2) = \mathbb{E}(HX(2)|\mathcal{F}_1) - \mathbb{E}(H|F_1)\mathbb{E}(X(2)|\mathcal{F}_1),\\ \xi(2) = \frac{\mathrm{Cov}(H, X(2)|F_1)}{\mathrm{Var}(X(2)|\mathcal{F}_1)}.\end{aligned}$$

Seuraavaksi on minimoitava

$$R_\theta(1) = \mathbb{E}\Big(\big(\eta(1) + X(1)\xi(2) - \eta(0) - X(1)\xi(1)\big)^2\Big).$$

Edellisen tapaan tästä saadaan yhtälöt

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{E}\Big(\eta(1) + X(1)\xi(2)\Big) - \eta(0) - \mathbb{E}(X(1))\xi(1), \\
\eta(0) &= \mathbb{E}(V(1)) - \mathbb{E}(X(1))\xi(1),
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{E}(X(1)V(1)) - \mathbb{E}(X(1))\eta(0) - \mathbb{E}(X(1)^2)\xi(1), \\
\xi(1) &= \frac{\mathrm{Cov(V(1), X(1))}}{\mathrm{Var(X(1))}}.
\end{aligned}$$

Riskin minimoiva strategia muodostuu siis, kun hetkellä 0 ostetaan salkku $\theta(0) = (\eta(0), \xi(1))^T$ ja hetkellä 1, riippuen markkinoiden käyttäytymisestä, myydään salkku ja muodostetaan uusi salkku $\theta(1) = (\eta(1), \xi(2))^T$.

Erikoistapauksena huomataan, että jos suoritus H on riippumaton hintaprosessista S, niin $\mathrm{Cov}(H, X(2)|\mathcal{F}_1) = 0$, jolloin salkun arvo hetkellä 1 on $V(1) = \eta(1) = \mathbb{E}(H|\mathcal{F}_1)$, joka on täten myös riippumaton riskillisen arvopaperin hinnasta $X(1)$, jolloin strategiaksi muodostuu $\theta = (\eta(0), \eta(1))$, jossa $\eta(j) = \mathbb{E}(H|\mathcal{F}_j), j = 1, 2$. Tämä yleistyy tapaukseen, jossa riskillisten arvopaperien määrä $d > 1$.

5. Yhdistetyt riskit

Tarkastellaan tässä luvussa tilannetta, jossa korvaus $\tilde{H}$ riippuu sekä arvopaperimarkkinoista, että vakuutetun eliniästä. Yksinkertainen esimerkki on säästövakuutus, jossa vakuutusyhtiö sitoutuu korvaamaan vakuutetulle arvopaperin j hetken n arvon, jos vakuutettu on tällöin elossa. Tässä osassa näytetään, kuinka lokaalin riskin minimointi yleistyy tähän tilanteeseen. Kuten aiemmin todettu, voidaan maksuprosessi $\tilde{A} = (\tilde{A}(0), \ldots, \tilde{A}(n))$ esittää yksittäisten suoritusten summana, joten esimerkiksi kuukausittain maksettavan eläkevakuutuksen lokaalin riskin minimointia tutkiessa voidaan keskittyä yksittäisten korvausten aiheuttaman riskin minimoimiseen.

5.1 Todennäköisyyskenttä

Merkitään $T_j, j = 1, \ldots, N$, kuten luvussa 3, x-ikäisen vakuutetun j jäljellä olevaa elinaikaa. Olkoon nämä satunnaismuuttujat määritelty stokastisella kentällä $(\Omega^T, \mathcal{F}^T, \mathbb{F}^T, \mathbb{P}^T)$. Olkoon edellisen luvun mukainen hintaprosessi $\tilde{S}$, sekä tästä saatu diskontattu hintaprosessi S määritelty stokastisella kentällä $(\Omega^S, \mathcal{F}^S, \mathbb{F}^S, \mathbb{P}^S)$, oletetaan myös, että S on $\mathbb{F}^S$-sopiva. Filtraatio $\mathbb{F}^S$ voi jälleen sisältää ylimääräistä tietoa markkinoista hintaprosessin S generoiman tiedon lisäksi. Oletetaan, että stokastiset kentät $(\Omega^T, \mathcal{F}^T, \mathbb{F}^T, \mathbb{P}^T)$ ja $(\Omega^S, \mathcal{F}^S, \mathbb{F}^S, \mathbb{P}^S)$ ovat riippumattomia toisistaan. Tästä seuraa erityisesti, että jäljellä olevat elinajat eivät riipu markkinoiden tilasta. Olkoon stokastinen kenttä $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, edellisten stokastisten kenttien tulo.

Tarkastellaan nyt korvauksia jotka ovat muotoa $\tilde{H} = \tilde{H}^S H^T$, sekä niiden diskontattuja vastineita $H = H^S H^T$. Tässä osaa H^S kutsutaan puhtaasti rahalliseksi suoritukseksi ja se oletetaan $\mathbb{F}^S$-sopivaksi. Tämä tarkoittaa, että se on riippumaton filtraatiosta $\mathbb{F}^T$. Osaa H^T kutsutaan perinteiseksi henkivakuutuskorvaukseksi, ja se oletetaan $\mathbb{F}^T$-sopivaksi. Tällöin H on $\mathbb{F}$-sopiva ja kutsumme sitä yhdistetyksi korvaukseksi. Suurin osa sijoitussidonnaisista säästövakuutuksista voidaan kirjoittaa summaksi tällaisia yhdistettyjä suorituksia. Yhdistetyssä korvauksessa diskontataan vain rahallinen suoritus, sillä muuten diskonttaus tapahtuisi kahdesti.

Koska markkinoilla oletetaan edelleen olevan arbitraasivapaus, täytyy tulokentällä $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ olla olemassa ainakin yksi riskineutraali mitta Q, jolloin myös kentällä $(\Omega^S, \mathcal{F}^S, \mathbb{F}^S, \mathbb{P}^S)$ on olemassa vähintään yksi riskineutraali mitta Q^S. Jos riskineutraaleja mittoja Q on tasan yksi, on myös riskineutraaleja mittoja Q^S tasan yksi. Tällöin markkinat ovat täydelliset yhdistettyjen korvausten suhteen. Jos mittoja Q^S on tasan yksi, mutta mittoja Q on enemmän, markkinat ovat täydelliset puhtaasti rahallisten suoritusten suhteen, muttei yhdistettyjen korvausten suhteen. Jos sekä mittoja Q, että mittoja Q^S on useita, niin markkinat eivät ole täydelliset kumpienkaan suhteen.

5.2 Lokaalin riskin minimointi yhdistettyjen korvausten suhteen

Lause 5.1. *Olkoon filtraatiot $\mathbb{F}^S$ ja $\mathbb{F}^T$ riippumattomat. Olkoon H^S puhtaasti rahallinen suoritus ja H^T perinteinen henkivakuutuskorvaus. Olkoon θ^S lokaalin riskin minimoiva strategia korvaukselle H^S ja olkoon prosessi $\theta^T = (\theta^T(0), \ldots, \theta^T(n))$, jossa*

$$\begin{aligned} \theta^T(t) &= \mathbb{E}(H^T | \mathcal{F}_t^T), \qquad & t = 0, \ldots, n-1, \\ \theta^T(n) &= 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Nyt prosessi $\theta = (\theta(0), \ldots, \theta(n))$, jossa

$$\theta(t) = \theta^S(t)\theta^T(t),$$

on lokaalin riskin minimoiva strategia yhdistetylle korvaukselle $H = H^S H^T$.

Prosessi (5.1) on esimerkin 2 tilanteen mukainen, jossa korvaus ei riipu rahamarkkinoista. Näin yhdistettyjen korvausten lokaalin riskin minimoiva strategia voidaan nähdä henkivakuutuskorvauksen, sekä puhtaasti rahallisen suorituksen tulona.

Todistus. Lauseen 4.8 nojalla riittää näyttää, että korvaukseen H ja strategiaan θ liittyvälle kustannusprosessille C ja hintaprosessin martingaaliosalle S^M pätee

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big(\Delta C(t) | \mathcal{F}_{t-1}\Big) &= 0, \\ \mathbb{E}\Big(S^M(t) \Delta C(t) | \mathcal{F}_{t-1}\Big) &= 0, \end{aligned}$$

kaikilla $t = 1, \ldots, n$. Olkoon C^S suoritukseen H^S ja strategiaan θ liittyvä kustannusprosessi. Olkoon $t < n$. Hyödyntäen tietoa, että θ^S minimoi lokaalin riskin ja ehdollisen odotusarvon iteratiivisuutta saadaan

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big(\Delta C(t) | \mathcal{F}_{t-1}\Big) &= \mathbb{E}\Big(V(t) - V^-(t) | \mathcal{F}_{t-1}\Big) \\ &= \mathbb{E}\Big(V^S(t)\theta^T(t) - V^{S-}(t)\theta^T(t-1) | \mathcal{F}_{t-1}\Big) \\ &= \mathbb{E}\Big(V^S(t) | \mathcal{F}_{t-1}^S\Big)\mathbb{E}\Big(\theta^T(t) | \mathcal{F}_{t-1}^T\Big) - \mathbb{E}\Big(V^{S-}(t) | \mathcal{F}_{t-1}^S\Big)\mathbb{E}\Big(\theta^T(t-1) | \mathcal{F}_{t-1}^T\Big) \\ &= \mathbb{E}\Big(V^S(t) - V^{S-}(t) | \mathcal{F}_{t-1}^S\Big)\theta^T(t-1) \\ &= \mathbb{E}\Big(\Delta C^S(t) | \mathcal{F}_{t-1}^S\Big)\theta^T(t-1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Samoin saadaan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(S^M(t)\Delta C(t)|\mathcal{F}_{t-1}\Big) &= \mathbb{E}\Big(S^M(t)(V^S(t)\theta^T(t) - V^{S-}(t)\theta^T(t-1))|\mathcal{F}_{t-1}\Big)\\ &= \mathbb{E}\Big(S^M(t)(V^S(t) - V^{S-}(t))|\mathcal{F}^S_{t-1}\Big)\theta^T(t-1)\\ &= \mathbb{E}\Big(S^M(t)\Delta C^S(t)|\mathcal{F}^S_{t-1}\Big)\theta^T(t-1)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Tapauksessa $t = n$ toimitaan samalla tavalla, mutta arvot $V(n)$ ja $V^S(n)$ korvataan suorituksilla H ja H^S. On osoitettu, että strategia θ minimoi lokaalin riskin korvaukselle H. $\square$

Korollaari 5.2. *Edellisen lauseen oletuksilla, kaikilla $t = 0, \ldots, n-1$*

$$\pi(t) = \pi^S(t)\theta^T(t) = \pi^S(t)\mathbb{E}_{\mathbb{P}^T}(H^T|\mathcal{F}^T_t),$$

on yhdistetyn korvauksen H reilu hetken t hinta, kun $\pi^S(t)$ on suorituksen H^S reilu hetken t hinta.

Esimerkki 3. Otetaan yksinkertaiseksi esimerkiksi nettokertamaksuinen normaali elämänvaravakuutus, jossa korvaussumma on $H^T = H$ ja vakuutuskausi n vuotta. Tällöin siis diskonttaamaton puhtaasti rahallinen suoritus on vakio $\tilde{H}^S = 1$. Olkoon riskiton arvopaperi 1 vuoden nollakuponkibondi vuosikorolla i. Edellisen nojalla hetken t reilu hinta tälle on

$$\begin{aligned}V(t) &= \pi^S(t)\mathbb{E}_{\mathbb{P}^T}(H^T|\mathcal{F}^T_t)\\ &= \pi^{\tilde{S}_0(n)}(t)\mathbb{E}_{\mathbb{P}^T}(H\mathbb{1}(n<T)|\mathcal{F}^T_t)\\ &= H_{n-t}p_{x+t}(1+i)^{-(n-t)},\end{aligned}$$

joka on luvussa 3 käsitelty vastuuvelka tällaiselle sopimukselle. Vakuutuksen hetken 0 ekvivalenssiperiaatteen mukainen arvo seuraa samoin.

Esimerkki 4. Toisena esimerkkinä jatketaan esimerkkiä 2 diskontatussa ympäristössä. Olkoon markkinoilla riskittömän bondin lisäksi 1 riskillinen arvopaperi, jonka hinta hetkellä t on $X(t)$. Olkoon nyt yhtiöllä vastattavissa sopimus, jonka mukaan yhtiö maksaa vakuutetulle arvopaperimarkkinoista riippuvan korvauksen H^S hetkellä n tämän ollessa elossa. Vakuutettu on x-ikäinen hetkellä 0. Toisin sanoen yhtiöllä on vastattavissa korvaus

$$H = H^S H^T = H^S\mathbb{1}(T > n).$$

Esimerkin 2 ja lauseen 5.1 mukaan lokaalin riskin minimoivaksi salkuksi hetkellä $n-1$ saadaan nyt $\theta^T(n-1)(\eta(n-1), \xi(n))$, jossa

$$\begin{aligned}\theta^T(n-1) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}(T>n)|\mathcal{F}_{n-1}) = {}_1p_{x+n-1}\mathbb{1}(T > n-1),\\ \eta(n-1) &= \mathbb{E}(H^S|\mathcal{F}_{n-1}) - \mathbb{E}(X(n)|\mathcal{F}_{n-1})\xi(n),\\ \xi(n) &= \frac{\mathrm{Cov}(H^S, X(n)|F_{n-1})}{\mathrm{Var}(X(n)|\mathcal{F}_{n-1})}.\end{aligned}$$

Samalla tavalla hetken t salkuksi saadaan $\theta^T(t)(\eta(t), \xi(t+1))$, jossa

$$\begin{aligned}\theta^T(t-1) &= {}_{n-t}p_{x+t}\mathbb{1}(T > t-1),\\ \eta(t-1) &= \mathbb{E}(V^S(t)|\mathcal{F}_{t-1}) - \mathbb{E}(X(t)|\mathcal{F}_{t-1})\xi(t),\\ \xi(t) &= \frac{\mathrm{Cov}(V^S(t), X(t)|F_{t-1})}{\mathrm{Var}(X(t)|\mathcal{F}_{t-1})}.\end{aligned}$$

Nyt vakuutuksen hetken 0 hinta voidaan määrätä rekursiivisesti

$$V(0) = \theta^T(0)(\eta(0) + X(0)\xi(1)).$$

Otetaan vielä konkreettiseksi esimerkiksi tilanne, jossa $n = 2$, arvopaperi 1 on osake, jonka mahdolliset arvot hetkillä 0, 1 ja 2 ovat

$$X(0) = \frac{3}{2}, \qquad X(1) = \epsilon_1, \qquad X(2) = \epsilon_1\epsilon_2,$$

jossa ϵ_1 ja ϵ_2 ovat riippumattomia satunnaismuuttujia, ϵ_1 on $\mathcal{F}_1$-mitallinen, ϵ_2 on $\mathcal{F}_2$-mitallinen ja joille

$$\mathbb{P}(\epsilon_1 = 1) = \mathbb{P}(\epsilon_1 = 2) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(\epsilon_2 = \frac{1}{2}) = \mathbb{P}(\epsilon_2 = \frac{3}{2}) = \frac{1}{2}.$$

Olkoon $\tilde{H}^S$ optio, jonka omistajalla on mahdollisuus hetkellä 2 ostaa osake hintaan 1. Laskemalla saadaan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(H^S|\mathcal{F}_1) &= \frac{1}{4}\mathbb{1}(\epsilon_1 = 1) + \mathbb{1}(\epsilon_1 = 2),\\ \mathbb{E}(X(2)|\mathcal{F}_1) &= \mathbb{1}(\epsilon_1 = 1) + 2\mathbb{1}(\epsilon_1 = 2),\\ \mathrm{Cov}(X(2), H^S|\epsilon_1) &= \frac{1}{8}\mathbb{1}(\epsilon_1 = 1) + \mathbb{1}(\epsilon_1 = 2),\\ \mathrm{Var}(X(2)|\epsilon_1) &= \frac{1}{4}\mathbb{1}(\epsilon_1 = 1) + \mathbb{1}(\epsilon_1 = 2),\end{aligned}$$

josta saadaan

$$\begin{aligned}\xi(2) &= \frac{1}{2}\mathbb{1}(\epsilon_1 = 1) + \mathbb{1}(\epsilon_1 = 2),\\ \eta(1) &= -\frac{1}{4}\mathbb{1}(\epsilon_1 = 1) - \mathbb{1}(\epsilon_1 = 2),\\ V^S(1) &= \frac{1}{4}\mathbb{1}(\epsilon_1 = 1) + \mathbb{1}(\epsilon_1 = 2).\end{aligned}$$

Samoin saadaan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(V^S(1)) &= \frac{5}{8}, & \mathbb{E}(X(1)) &= \frac{3}{2},\\ \mathrm{Cov}(X(1), V^S(1)) &= \frac{3}{16}, & \mathrm{Var}(X(1)) &= \frac{1}{4},\end{aligned}$$

jolloin

$$\xi(1) = \frac{3}{4}, \qquad \eta(0) = -\frac{1}{2}, \qquad V^S(0) = \frac{5}{8}.$$

Olkoon vielä ${}_2p_x = \frac{9}{10}$ ja ${}_1p_{x+1} = \frac{14}{15}$. Tässä välit $[0, 1)$ ja $[1, 2)$ voisivat olla esimerkiksi 10 vuoden pituisia. Tällöin vakuutusyhtiö tarkistaisi sijoitukset 20 vuoden sopimuksessa ainoastaan 10 vuoden jälkeen. Näin vakuutusyhtiö hankkisi hetkellä 0 salkun

$$\frac{9}{10}(\eta(0), \xi(1)),$$

ja hetkellä 1 vakuutetun ollessa elossa vaihtaisi tämä salkkuun

$$\frac{14}{15}(\eta(1), \xi(2)).$$

Mikäli vakuutettu kuolee hetkeen 1 mennessä, yhtiö myy sijoitukset. Näin sopimuksen arvoksi hetkellä 0 saadaan

$${}_2p_x V^S(0) = \frac{9}{16}.$$

6. Universal life- vakuutus

Universal life on vakuutusmalli, joka on suosittu varsinkin Pohjois-Amerikassa. Yleensä nämä myydään elinikäisinä kuolemanvaravakuutuksina, mutta näitä käytetään usein säästövakuutuksina, sillä niissä on usein joustavat maksusuunnitelmat, sijoituksista riippuva korko, johon on asetettu taattu minimikorko ja irtisanomissanktio asetetaan tietyn vuoden jälkeen nollaksi. Vakuutusyhtiö siis olettaa, että vakuutuksen haltija irtisanoo vakuutuksen jossain vaiheessa, ellei satu kuolemaan ennen sitä. Vakuutetulle tärkeää on vakuutuksen arvon läpinäkyvyys, eli vakuutettu voi tarkkailla vakuutuksen arvon kehitystä, sekä nähdä osuudet, jotka menevät hallintokuluihin, osuudet jotka menevät kuolemanvaraan, sekä osuudet, jotka kasvattavat vakuutuksen arvoa. Vakuutetulla voi olla mahdollisuus päättää, mihin hänen rahansa sijoitetaan, tai vakuutusyhtiön asiantuntia voi tehdä tämän vakuutetun puolesta.

Vakuutetulla on oikeus tietyin rajoin päättää vakuutusmaksujensa suuruuden elämäntilanteensa mukaan. Vakuutusmaksuista vähennetään hallintokulut, sekä kuolemanvarakorvauksen ylläpitämiseen tarkoitettu summa, ja loput käytetään kasvattamaan vakuutuksen arvoa. Maksuja on luonnollisempi suorittaa kuukausittain, mutta oletetaan jälleen yksinkertaisuuden vuoksi maksujen tapahtuvan vuosittain. Tämän kohdan universal life- vakuutuksen rakenne perustuu lähteeseen Dickson, Hardy, Waters [2].

6.1 Vakuutuksen rakenne

Käytetään jälleen merkintöjä $V(t)$ vakuutuksen vuoden t vastuuvelasta, eli arvosta, B^t vuonna t maksettavasta bruttovakuutusmaksusta, κB^t vakuutusmaksuun suhteutetuista hallintokuluista, γ kiinteistä vuosittaisista hallintokuluista, sekä ρ_t vuoden t irtisanomissanktiosta. Vuonna t tapahtuvasta kuolintapauksesta vakuutetulle maksetaan vakuutuksen sen hetkinen arvo, sekä lisäkuolinkorvaus K_t. Vuoden t kuolinkorvauksen hinta C_t vähennetään vuosittain vakuutuksen arvosta. Vakuutuksen perustamiskustannukset oletetaan kerättäviksi maksukauden aikana osana kuluja κB^t. Käytetään merkintää i_t^* vuoden $t-1$ aikana vakuutukseen hyvitetystä korosta. Hyvitetyn koron rakenne oletetaan seuraavaksi

$$i_t^* = \max(\bar{i}_t, r_t - \lambda_t),$$

jossa $\bar{i}_t$ on yhtiön lupaama minimikorko vuodelle t, r_t on sijoituksista kertynyt todellinen tuotto vuonna t ja λ_t on todellisesta tuotosta vähennettävä hajonta. Esimerkiksi sopimuksessa yhtiö voisi luvata koroksi sijoituksista kertyneet tuotot, vähennettynä 2%, kuitenkin niin, että korkoa kertyy vähintään 2%.

Näillä merkinnöillä elossa olevan vakuutetun vakuutuksen hetken t arvo, eli vastuuvelka $V(t)$ määräytyy rekursiivisesti yhtälöstä

$$V(t) = \Big(V(t-1) + (1-\kappa)B^{t-1} - \gamma - C_t\Big)(1+i_t^*),$$

jossa $V(0) = 0$. Tämä on siis vakuutuksen arvo juuri ennen, kun mahdollinen vuoden t maksu suoritetaan. Tärkeää vakuutusyhtiön kannalta tässä yhtälössä on vain, mikä vuoden t vastuuvelaksi määräytyy. Arvot κ, γ, C_t ja i_t^* voi siis olla mahdollista määrätä äärettömän monella eri tavalla, kunhan lopputulos pysyy samana. Näitä arvoja käytetään vakuutuksen arvoa johtaessa, mutta muuten ne eivät välttämättä edusta oikeita kuluja, mitä yhtiön kannalta syntyy.

Kirjoittamalla tämä rekursio auki saadaan

$$V(t) = \sum_{j=0}^{t-1} \Big((1-\kappa)B^j - \gamma - C_t\Big)(1+i_{j+1}^*)\dots(1+i_t^*). \tag{6.1}$$

Jos vakuutettu kuolee välillä $(t, t+1]$, maksaa vakuutusyhtiö vakuutetulle summan $V(t) + K_t$. Hetkellä n vakuutusyhtiö sitoutuu maksamaan vakuutetulle summan $V^-(n)$ vakuutetun ollessa tällöin elossa. Ylänotaatioviiva on tässä tarkentamaan, että maksu tehdään juuri ennen hetkeä n, koska haluamme vastuuvelan hetkellä n olevan nolla.

6.2 Takaisinosto

Vakuutetulla on oikeus irtisanoa sopimus ennen sen varsinaista päättymistä. Tällöin vakuutuksen haltijalle maksetaan vakuutuksen sen hetkinen arvo $V(t)$ vuonna t tapahtuvasta irtisanomisesta, josta vähennetään irtisanomissanktio ρ_t. Tähän sanktioon vaikuttaa kohdassa 3.5 mainitut seikat. Sijoitussidonnaisissa vakuutuksissa vakuutetun irtisanomispäätöstä ei usein voida pitää riippumattomana markkinoiden käyttäytymisestä, mutta tähän ei perehdytä tässä tarkemmin. Universal life -tyyppisessä vakuutuksessa myös minimikorko takaa, ettei vakuutuksen arvo voi ainakaan vähentyä markkinoiden käyttäytymisestä johtuen. Lisäksi arvopaperi tai rahasto, johon vakuutuksen arvon kehitys on sidottu, voidaan vuosittain vaihtaa, jos tähän on tarvetta. Haitalliselta valikoitumiselta vältytään, sillä sopimuksissa on sekä elämänvara-, että kuolemanvaraosuudet. Universal life -vakuutuksissa irtisanomissanktiot ovat usein korkeita ensimmäisinä vuosina, josta ne vähenevät vuosittain ja tyypillisesti noin kymmenenvuoden jälkeen ne asetetaan nollaksi.

6.3 Hinnoittelu ja lokaalin riskin minimointi

Tarkastellaan tässä universal life- vakuutuksen hinnoittelua ja lokaalin riskin minimointia. Ohitetaan nyt tutkielman aiheen perusteella kuolemanvaraosuus ja tarkastellaan vain Universal life- tyyppistä säästövakuutusta. Oletetaan myös, että vakuutus päättyy n

vuoden päästä, ja että irtisanomismahdollisuutta ei ole. Nyt kyseessä on sopimus, jossa yhtiö sitoutuu korvaamaan summan $\tilde{H} = \tilde{H}^S H^T$ hetkellä n vakuutetun ollessa tällöin elossa, jossa edellisen luvun tapaan $\tilde{H}^S$ on diskonttaamaton puhtaasti rahallinen suoritus ja H^T on diskontattu perinteinen henkivakuutuskorvaus. Olkoon x-ikäisen vakuutetun jäljellä oleva elinaika T ja markkinoiden vuosikorko vakio $i > 0$. Olkoon

$$H^T = \mathbb{1}(T > n).$$

Merkitään

$$\tilde{H}^S = \tilde{H}^S(n)$$

ja

$$\tilde{H}^S(t) = \sum_{j=0}^{t-1} P^j_{n-j} p^{-1}_{x+j}(1 + i^*_{j+1}) \dots (1 + i^*_t),$$

jossa P^t on vuonna t maksettava nettovakuutusmaksu ja i^*_{t+1} on vuoden t hyvitetty korko. Toisin sanoen

$$P^t = (1 - \kappa)B^t - \gamma.$$

Vuoden t vakuutusmaksu ei ole yleisesti vakuutusyhtiön tiedossa ennen makushetkeä, mutta oletetaan, että se on rajoitettu, eli $P^t < M$, jollakin $M \in \mathbb{R}$. Tämä on myös alhaalta rajoitettu, sillä vakuutusmaksu ei voi olla negatiivinen. Mahdollisesti sopimuksessa on tietyille vuosille myös jokin minimivakuutusmaksu. Tästä seuraa, että $P^t \in \mathcal{L}^2$. Oletetaan vielä, että hyvitetty korko on toistettavissa, eli on olemassa jokin salkku, jonka hetken $t = 1, \dots, n$ hinnalle $X(t)$ pätee

$$i^*_t = \frac{X(t) - X(t-1)}{X(t-1)}.$$

Tällöin $H^S(t)$ on $\mathcal{F}_t$-mitallinen satunnaismuuttuja.

Kertamaksuisen vakuutuksen tapauksessa vakuutettu maksaa hetkellä nolla yhtiölle hinnan P^0 ja hetkellä n on oikeutettu

$$\tilde{H} = \tilde{H}^S H^T = P^0_n p^{-1}_x (1 + i^*_1) \dots (1 + i^*_n)\mathbb{1}(T > n)$$

suuruiseen korvaukseen. Elämänvaraosuuden H^T hetken nolla hinta on

$$\pi^T(0) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^T}(\mathbb{1}(T(x) > n)) = {}_n p_x,$$

ja puhtaasti rahallisen suorituksen $\tilde{H}^S$ hetken nolla hinta $\pi^S(0)$ on sen lokaalin riskin minivoivan salkun arvo hetkellä nolla. Koska i^*_t on toistettavissa kaikilla t, on myös $\tilde{H}^S$ toistettavissa. Joten lauseen 5.2 mukaan kertamaksuisen vakuutuksen hinta hetkellä nolla on $\pi^S(0)_n p_x$. Maksun P^0 täytyy vastata tätä reilua hintaa. Samoin korvauksen $\tilde{H}$ hetken t hinta on $\pi^S(t)_{n-t} p_{x+t}$. Esimerkiksi, maksun

$$\tilde{H}^S = P^0_n p^{-1}_x (1 + i^*_1) \dots (1 + i^*_n)$$

tapauksessa, sijoittaa yhtiö $\pi^S(0) = P^0_n p_x^{-1}$ euroa toistavaan salkkuun rahallisen osuuden suojaamiseen ja $\pi^T(0) = {}_n p_x$ euroa elämänvaran suojaamiseen.

Siirrytään nyt moniperiodiseen tilanteeseen. Vakuutettu maksaa vuoden t alussa vakuutusmaksun P^t, joka ei ole vakuutusyhtiön tiedossa ennen tätä. Tarkastellaan tilannetta jälleen dynaamisesti. Hetkellä $n-1$ ovat kaikki vakuutusmaksut yhtiön tiedossa ja hetkellä n maksettava korvaus on

$$H = \sum_{j=0}^{n-1} P^j_{n-j} p_{x+j}^{-1} (1 + i^*_{j+1}) \dots (1 + i^*_n) \mathbb{1}(T(x + n - 1) > 1).$$

Tähän liittyvän riskin minimoimiseen käytetään lauseita 4.8 ja 5.1, kuten aiemminkin. Hetkellä $n-2$ voidaan osa

$$H(n-1) = \sum_{j=0}^{n-2} P^j_{n-j} p_{x+j}^{-1} (1 + i^*_{j+1}) \dots (1 + i^*_n) \mathbb{1}(T(x + n - 2) > 2)$$

suojata normaalisti, mutta lisäksi ei ole tiedossa, jos vakuutettu aikoo hetkellä $n-1$ ostaa lisävakuutusta, jonka aiheuttama muutos korvaukseen pitäisi suojata jo hetkellä $n-2$. Kuitenkin, koska hetken $n-1$ vakuutusmaksu P^{n-1} on korvauksen

$$H^* = P^{n-1} {}_1 p_{x+n-1}^{-1} (1 + i^*_n) \mathbb{1}(T(x + n - 1) > 1)$$

reilu hinta, riittää se suojaamaan tämän osan. Lisäksi lauseen 4.12 mukaan, jos strategia θ_{n-1} minimoi lokaalin riskin korvaukselle $H(n-1)$ ja strategia θ^* minimoi lokaalin riskin korvaukselle H^*, niin strategia $\theta_{n-1} + \theta^*$ minimoi lokaalin riskin korvaukselle H. Tätä jatkamalla havaitaan, että vakuutusyhtiön riittää muodostaa suojaava strategia vain jo maksettujen vakuutusmaksujen perusteella. Luvussa 4.2 vaadittiin maksuprosessilta, että jokainen suoritus on neliöintegroituva, joten vakuutusmaksujen on perusteltua olla ylhäältä rajattuja, sekä lisäksi tietysti positiivisia, jolloin tämä vaatimus täyttyy.

Lisäksi tästä seuraa, että myös hallintokuluja koskevat kustannukset voidaan erottaa varsinaisesta korvauksesta, ja suojata normaaliin tapaan. Vakioinen hallintomaksu saadaan suojattua riskittömällä bondilla, ottaen huomioon vakuutetun elinajasta aiheutuvan kertoimen. Vakuutusmaksusta aiheutuva kuormitus taas tapahtuu samalla hetkellä, kun maksu tapahtuu ja se otetaan suoraan vakuutusmaksusta, jolloin tätä ei tarvitse suojata ollenkaan. Kokonaisuudessaan vakuutuksen hetken t reilu hinta (ennen uuden maksun suorittamista) on

$$\begin{aligned}
\pi(t) &= {}_{n-t} p_{x+t} \sum_{j=0}^{t-1} \Big((1-\kappa) B^j - \gamma \Big) {}_{n-j} p_{x+j}^{-1} (1 + i^*_{j+1}) \dots (1 + i^*_t) \\
&= \sum_{j=0}^{t-1} \Big((1-\kappa) B^j - \gamma \Big) {}_{t-j} p_{x+j}^{-1} (1 + i^*_{j+1}) \dots (1 + i^*_t),
\end{aligned}$$

joka on kuten kohdassa (6.1), ilman kuolintapauskorvausta. Tässä on kuolleisuuksista aiheutuvat kertoimet, toisin kuin kohdassa (6.1), johtuen kuolemanvaraosuuden puuttumisesta. Tämä on yhtäpitävä rekursiivisen kaavan

$$V(t) = {}_1p_{x+t-1}^{-1}\Big(V(t-1) + (1-\kappa)B^{t-1} - \gamma\Big)(1+i_t^*)$$

kanssa, jossa $V(0) = 0$. Tämä riittää siis minimoimaan lokaalin riskin yhdistetyssä korvauksessa ja on siis määrä, jolla yhtiön tulee varautua tämän vakuutuksen aiheuttamiin velvoitteisiin. Siten sitä voidaan siis ajatella vakuutuksen vastuuvelkana.

6.4 Esimerkki universal life -vakuutuksesta

Tarkastellaan tässä numeerista esimerkkiä, minkälainen universal life -vakuutussopimus voisi olla. Olkoon nyt vakuutettu 45-vuotias mies vakuutuksen perustamishetkellä. Vakuutuskausi oletetaan 20 vuoden pituiseksi. Vakuutusmaksuja sovitaan maksettavaksi 6 vuotta, niin että vakuutettu maksaa vähintään 1000 euroa jokaisen vuoden alussa, mutta voi halutessaan maksaa enemmänkin. Olkoon markkinoilla vakioinen vuosikorko $i = 0,03$. Olkoon vuoden t hyvitetty korko i_t^* sidottu johonkin salkkuun $\theta(t)$ siten, että

$$i_t^* = \max\Big(0,02, \frac{\theta(t) - \theta(t-1)}{\theta(t-1)} - 0,02\Big).$$

Eli yhtiö maksaa korkoa vuosittain sijoituksista kertyvän tuoton verran, josta vähennetään hajonta $\lambda = 0,02$. Vähintään korkoa kertyy kuitenkin kaksi prosenttia. Vakuutuksen hallintokuluihin pidätetään vuosittain $\gamma = 50$ euroa, sekä lisäksi kaksi prosenttia vuosimaksusta B vuosina, kun vakuutusmaksuja maksetaan. Vakuutuksen perustamishetkellä syntyy kustannus $I = 100$ euroa, joka oletetaan perittäväksi takaisin osana vakuutusmaksuja. Vakuutuksen arvo ja siten myös siihen liittyvä vastuuvelka euroissa vuonna $t = 1, \ldots, n$ on

$$V(t) = \sum_{j=0}^{t-1}(0,98B^j - 50)_{t-j}p_{x+j}^{-1}(1+i_{j+1}^*)(1+i_t^*).$$

Rekursiivisesti tämä on

$$V(t+1) = {}_1p_{x+t}^{-1}\Big(V(t) + (0.98B^t - 50)\Big)(1+i_{t+1}^*),$$

jossa $B^j = 0$, kun $j = 6, \ldots, 19$. Vuoden 19 lopussa maksetaan vakuutetulle summa $V^-(20)$, mikäli on tämä vielä tällöin elossa. Nyt vakuutuksen arvon kehitys on taulukon mukainen, kun hyvitetyt korot oletetaan kuten taulukossa. Kuolleisuustodennäköisyydet ovat Yhdysvaltojen sosiaaliturvan vuoden 2014 tilastoista [9].

t	B^t	κB^j	γ	i^*_{t+1}	${}_1p^{-1}_{x+t}$	$V(t+1)$
0	2000	40	50	0,05	1,0031	2011,75
1	2500	50	50	0,04	1,0034	4603,89
2	2000	40	50	0,02	1,0038	6669,08
3	3000	60	50	0,05	1,0041	10078,50
4	2000	40	50	0,05	1,0046	12645,24
5	1000	20	50	0,04	1,0050	14189,01
6	0	0	50	0,04	1,0055	14785,50
7	0	0	50	0,04	1,0060	15417,37
8	0	0	50	0,04	1,0066	16087,60
9	0	0	50	0,04	1,0072	16799,37
10	0	0	50	0,04	1,0079	17556,34
11	0	0	50	0,04	1,0086	18362,31
12	0	0	50	0,04	1,0093	19221,06
13	0	0	50	0,04	1,0100	21113,17
14	0	0	50	0,04	1,0107	20889,96
15	0	0	50	0,04	1,0115	22157,27
16	0	0	50	0,04	1,0124	23275,57
17	0	0	50	0,04	1,0132	24474,25
18	0	0	50	0,04	1,0141	25759,80
19	0	0	50	0,04	1,0150	27140,39

Kirjallisuutta

[1] H. Bühlmann and A. Gisler. *A Course in Credibility Theory and its Applications*. Springer, 2005.

[2] D. C. Dickson, M. R. Hardy, and H. R. Waters. *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. Cambridge University, second edition, 2013.

[3] D. Gasbarra. *Todennäköisyysteorian luentomoniste, kevät 2015*. Helsingin yliopisto, 2015.

[4] H. U. Gerber. *Life Insurance Mathematics*. Springer, 1997.

[5] H. Nyrhinen. *Henkivakuutusmatematiikan luentomoniste*. Helsingin yliopisto, 2016.

[6] H. Nyrhinen. *Sijoitustoiminnan matematiikan luentomoniste*. Helsingin yliopisto, 2017.

[7] J. Pansera. *Discrete-time local risk minimization of payment prosesses and applications to equity-linked life-insurance contracts*, volume 50. Elsevier, 2012.

[8] M. Pesonen, P. Soininen, and T. Tuominen. *Henkivakuutusmatematiikka*. Finanssi- ja vakuutuskustannus Oy FINVA, 2014.

[9] US Social Security. Actuarial life table. `https://www.ssa.gov/oact/STATS/table4c6.html`, Maaliskuu 2018.

[10] D. Williams. *Probability with Martingales*. Cambridge University, 1991.